

Devoir maison n°1
À rendre pour le mardi 20/09

Exercice 1

Soient les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{F} = \text{Vect}(A, B, C, D)$.

1. Montrer que la famille (A, B, C, D) est liée. Qu'en déduire sur $\dim(\mathcal{F})$?
2. Montrer que (A, B, C) est une base de \mathcal{F} . Donner le rang de la famille (A, B, C, D) .
3. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ appartient-elle à \mathcal{F} ? Si oui, donner ses coordonnées dans la base (A, B, C) .
4. Montrer que $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid x + z = y - 2t \right\}$.

Exercice 2

On considère les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{F} = \text{Vect}(I, J, K)$.

1. Donner une base et la dimension de \mathcal{F} .
2. Calculer les produits J^2, K^2, JK, KJ . En déduire que \mathcal{F} est *stable par produit*, c'est-à-dire : $\forall (M, M') \in \mathcal{F}^2, MM' \in \mathcal{F}$.
3. On s'intéresse à l'inversibilité des matrices de \mathcal{F} . Pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on note $M(a, b, c) = aI + bJ + cK$.
 - (a) Montrer que M est inversible ssi $a \neq 0$.
 - (b) Pour $(b, c, x, y) \in \mathbb{R}^4$, calculer le produit $(I + bJ + cK)(I + xJ + yK)$. En déduire $M(1, b, c)^{-1}$.
4. On s'intéresse maintenant aux puissances de la matrice $M(1, 1, 1) = I + J + K$.
 - (a) Exprimer $(I + J + K)^2$ et $(I + J + K)^3$ comme des combinaisons linéaires de I, J, K .
 - (b) Justifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe trois réels a_n, b_n, c_n tels que

$$(I + J + K)^n = a_n I + b_n J + c_n K$$

Justifier que ces réels sont uniques.

Exprimer $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ en fonction de a_n, b_n, c_n .

- (c) Déterminer la valeur de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$; puis de b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (d) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

5. On rappelle que pour M inversible, on définit $M^{-n} = (M^{-1})^n$. Montrer, à l'aide de ce qui précède, que pour tout entier $n > 0$, on a

$$(I + J + K)^{-n} = I - nJ + \frac{n(n-1)}{2}K$$