

## Devoir maison n°1bis À rendre pour le 20/09

### Exercice 1

On considère les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note  $\mathcal{F} = \text{Vect}(I, J, K)$ .

1. Donner une base et la dimension de  $\mathcal{F}$ .
2. Calculer les produits  $J^2, K^2, JK, KJ$ . En déduire que  $\mathcal{F}$  est *stable par produit*, c'est-à-dire :

$$\forall (M, M') \in \mathcal{F}^2, MM' \in \mathcal{F}$$

3. On s'intéresse à l'inversibilité des matrices de  $\mathcal{F}$ . Pour  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ , on note  $M(a, b, c) = aI + bJ + cK$ .

- (a) Montrer que  $M$  est inversible ssi  $a \neq 0$ .
- (b) Pour  $(b, c, x, y) \in \mathbb{R}^4$ , calculer le produit  $(I + bJ + cK)(I + xJ + yK)$ . En déduire  $M(1, b, c)^{-1}$ .

4. On s'intéresse maintenant aux puissances de la matrice  $M(1, 1, 1) = I + J + K$ .

- (a) Exprimer  $(I + J + K)^2$  et  $(I + J + K)^3$  comme des combinaisons linéaires de  $I, J, K$ .
- (b) Justifier que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , il existe trois réels  $a_n, b_n, c_n$  tels que

$$(I + J + K)^n = a_n I + b_n J + c_n K$$

Justifier que ces réels sont uniques.

Exprimer  $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$  en fonction de  $a_n, b_n, c_n$ .

- (c) Déterminer la valeur de  $a_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ; puis de  $b_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- (d) Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

5. On rappelle que pour  $M$  inversible, on définit  $M^{-n} = (M^{-1})^n$ . Montrer, à l'aide de ce qui précède, que pour tout entier  $n > 0$ , on a

$$(I + J + K)^{-n} = I - nJ + \frac{n(n-1)}{2}K$$

### Exercice 2 : Espaces supplémentaires

On s'intéresse dans ce problème à la notion de sous-espaces supplémentaires.

**Définition 1.** Soit  $E$  un espace vectoriel, et  $F$  et  $G$  deux sous-espaces de  $E$ . On dit que  $F$  et  $G$  sont *supplémentaires* dans  $E$  ssi on a :

- $\forall x \in E, \exists (u, v) \in F \times G, x = u + v$  ;
- $F \cap G = \{0_E\}$ .

On note alors :  $E = F \oplus G$ .

#### Un premier exemple

Soit  $E = \mathbb{R}^3$ ,  $F = \text{Vect}((1, 1, 1))$ , et  $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ .

1. Montrer que  $F \cap G = \{0_E\}$ .
2. Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . On suppose qu'on peut écrire

$$(x, y, z) = a(1, 1, 1) + (x', y', z') \quad \text{avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } x' + y' + z' = 0$$

Déterminer la valeur de  $a$  en fonction de  $x, y$  et  $z$ .

3. Montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$ .

## Un second exemple

On rappelle qu'une matrice  $M$  est dite *symétrique* ssi  ${}^tM = M$ , et *antisymétrique* ssi  ${}^tM = -M$ .

On note  $S_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  symétriques, et  $A_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  antisymétriques.

4. Montrer que  $S_n(\mathbb{R})$  et  $A_n(\mathbb{R})$  sont des sev de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
5. Donner une base de  $S_3(\mathbb{R})$  (une base de  $A_3(\mathbb{R})$  a été obtenue en TD...).
6. Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que la matrice  $\frac{1}{2}(M + {}^tM)$  est symétrique, et que la matrice  $\frac{1}{2}(M - {}^tM)$  est antisymétrique.
7. En déduire que  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ .

## Non-unicité du supplémentaire

On montre ici sur un exemple que si  $F$  est un sev de  $E$ , il existe au moins deux sev  $G$  et  $H$  de  $E$ , avec  $G \neq H$ , tels que :

- $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$  ;
- $F$  et  $H$  sont supplémentaires dans  $E$ .

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 5,  $F$  et  $G$  deux sev de  $E$  supplémentaires dont on note des bases respectives  $(u_1, u_2, u_3)$  et  $(v_1, v_2)$ .

Soit  $H = \text{Vect}(v_1 + u_1, v_2)$ .

8. Montrer que  $v_1 + u_1 \notin G$  (on procédera par l'absurde). En déduire que  $G \neq H$ .
9. Montrer que  $F$  et  $H$  sont supplémentaires dans  $E$ .