

## Devoir maison n°2-2bis Corrigé

### Exercice 1 DM2 (algèbre linéaire)

On note  $(i, j, k)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  définie par :

$$\begin{cases} f(i) = i + k \\ f(j) = -i + j - 3k \\ f(k) = j - 2k \end{cases}$$

1. **Donner  $\text{Mat}(f, \mathcal{B}_c)$ . On note cette matrice  $A$ .**

Par la méthode de construction habituelle :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

2. **Déterminer  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{rg}(f)$ .**

Comme on est dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ , on connaît l'image par  $f$  de tout vecteur de  $\mathbb{R}^3$  par lecture de  $A$  :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f((x, y, z)) = (x - y, y + z, x - 3y - 2z)$$

On écrit alors :

$$(x, y, z) \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f((x, y, z)) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = -y \end{cases}$$

après manipulations simples sur le système linéaire.

On obtient  $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((1, 1, -1))$  ; ce vecteur générant  $\text{Ker}(f)$  est non nul, donc  $\text{Ker}(f)$  est de dimension 1.

Par le théorème du rang appliqué à  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  on en déduit  $\text{rg}(f) = 2$ .

3. **Calculer les vecteurs  $f^2(i), f^2(j), f^2(k), f^3(i), f^3(j), f^3(k)$ .**

*On réfléchira à une manière rapide de répondre à cette question en utilisant  $A$ .*

Si  $A$  est la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{B}_c$ , alors  $A^2$  est celle de  $f^2$  et  $A^3$  est celle de  $f^3$ ...

Un calcul matriciel donne  $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  matrice sur laquelle on lit :

- $f^2(i) = i + j - k$
- $f^2(j) = -2i - 2j + 2k$
- $f^2(k) = -i - j + k$

On a aussi  $A^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ , ce qui donne  $f^3(i) = f^3(j) = f^3(k) = 0_{\mathbb{R}^3}$ .

4. **Montrer que  $(i, f(i), f^2(i))$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .**

Cette famille est, d'après ce qui précède, la famille  $\{(1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, -1)\}$ .

Avec la méthode usuelle il est évident que cette famille est libre ; de plus elle est de cardinal 3 et  $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ , et c'est donc une base de  $\mathbb{R}^3$ .

**Soit  $g$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  tel que  $f \circ g = g \circ f$ .**

5. **Montrer qu'il existe  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tels que  $g(i) = ai + bf(i) + cf^2(i)$ .**

$g(i)$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  ; les  $a, b, c$  introduits ici sont ses coordonnées dans la base  $(i, f(i), f^2(i))$  qui existent donc bien (et sont uniques, mais ici ce n'est pas demandé).

6. **Montrer qu'alors**  $g = a \text{Id}_{\mathbb{R}^3} + bf + cf^2$ .

*On rappelle que deux endomorphismes sont égaux ssi ils coïncident sur une base de E.*

On se place sur la base  $(i, f(i), f^2(i))$ . D'après l'indication il suffit de vérifier que les endomorphismes  $g$  et  $a \text{Id}_{\mathbb{R}^3} + bf + cf^2$  ont bien le même effet sur les vecteurs de cette base, à savoir :

- $g(i) = (a \text{Id}_{\mathbb{R}^3} + bf + cf^2)(i)$
- $g(f(i)) = (a \text{Id}_{\mathbb{R}^3} + bf + cf^2)(f(i))$
- $g(f^2(i)) = (a \text{Id}_{\mathbb{R}^3} + bf + cf^2)(f^2(i))$

Pour le premier point on cherche à vérifier si  $g(i) = ai + bf(i) + cf^2(i)$  : c'est vrai par définition de  $a, b, c$  !

Pour le second on a d'une part

$$\begin{aligned}(a \text{Id}_{\mathbb{R}^3} + bf + cf^2)(f(i)) &= af(i) + bf(f(i)) + cf^2(f(i)) \\ &= af(i) + bf^2(i) + cf^3(i)\end{aligned}$$

et d'autre part, en sachant que  $f$  et  $g$  commutent :

$$g(f(i)) = f(g(i)) = f(ai + bf(i) + cf^2(i)) = af(i) + bf^2(i) + cf^3(i)$$

On obtient bien la même expression : le second point est vérifié.

Enfin pour le troisième point on procède de manière similaire ; on trouve

$$g(f^2(i)) = af^2(i) + bf^3(i) + cf^4(i) = (a \text{Id}_{\mathbb{R}^3} + bf + cf^2)(f^2(i))$$

Ceci permet de conclure qu'on a bien  $g = a \text{Id}_{\mathbb{R}^3} + bf + cf^2$ .

7. **En déduire l'ensemble des endomorphismes de  $\mathbb{R}^3$  tels que  $f \circ g = g \circ f$ .**

Soit  $\mathcal{C}$  l'ensemble des  $g$  tels que  $f \circ g = g \circ f$ .

On vient de voir que si  $g \in \mathcal{C}$ , alors  $g$  est combinaison linéaire de  $\text{Id}, f, f^2$  : autrement dit

$$\mathcal{C} \subset \text{Vect}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, f, f^2)$$

Réciproquement, soit  $g$  un endomorphisme de  $\text{Vect}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, f, f^2)$  :  $g$  est de la forme  $\alpha \text{Id}_{\mathbb{R}^3} + \beta f + \gamma f^2$ , et on a clairement  $f \circ g = g \circ f = \alpha f + \beta f^2 + \gamma f^3$  :  $g \in \mathcal{C}$ .

On a donc l'inclusion réciproque, et finalement l'égalité :

$$\mathcal{C} = \text{Vect}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, f, f^2)$$

## Exercice 2 (étude d'une suite récurrente)

On pose, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1,  $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

1. **Montrer :**  $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$ . **En déduire :**  $\forall n \geq 1, \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \leq -\frac{1}{n+1}$ .

Habituel : on pose  $g(x) = \ln(1+x) - x$ .  $g$  est dérivable sur  $] -1, +\infty[$  comme composée de fonctions dérivables ; on trouve que  $g'$  est positive sur  $] -1, 0]$  et négative sur  $[0, +\infty[$ .  $g$  admet donc sa valeur maximale en 0, et  $g(0) = 0$  ; ce qui donne :  $\forall x > -1, g(x) \leq 0$  ou encore  $\ln(1+x) \leq x$ .

On applique ensuite cette inégalité à  $x = -\frac{1}{n+1}$ .  $n \geq 1$  donc  $-\frac{1}{n+1} \geq -\frac{1}{2} > -1$  : on a bien le droit de poser

$x = -\frac{1}{n+1}$  dans l'inégalité précédente.

On trouve :

$$\forall n \geq 1, \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq -\frac{1}{n+1}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\forall n \geq 1, \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \leq -\frac{1}{n+1}$$

2. **Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , montrer que  $v_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}$ , puis que :  $v_n \leq \ln(n) + 1$ .**

NB : pour  $n = 1$  la somme précédente n'est pas bien définie... sauf à poser par convention  $\sum_{k=1}^0 (...) = 0$  (pas de termes à sommer)

Mais un énoncé correct préciserait cela.

On isole le premier terme de  $v_n$  et on effectue un changement d'indice  $i = k - 1$  :

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i+1}$$

ce qui donne bien la formule voulue ( $i$  est un indice muet et peut être remplacé par  $k$ ).

La formule précédente donne, pour tout  $k \geq 1$  :

$$\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \geq \frac{1}{k+1}$$

Pour tout  $n \geq 2$  : on somme l'inégalité précédente pour  $k$  allant de 1 à  $n-1$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) &\geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \\ \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \ln(k) &\geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \\ \ln(n) - \ln(1) &\geq v_n - 1 \\ v_n &\leq 1 + \ln(n) \end{aligned}$$

ce qui donne l'inégalité recherchée à partir de l'indice 2.

Pour  $n = 1$ , l'inégalité à démontrer s'écrit :  $v_1 \leq \ln(1) + 1 = 1$ . Or  $v_1 = 1$  : cette inégalité est bien vérifiée.

On a bien démontré :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \leq \ln(n) + 1$ .

**On considère la suite  $(u_n)$  définie par**

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \end{cases}$$

3. (a) **Montrer par récurrence que chaque terme de cette suite est défini et strictement positif.**

Par récurrence que  $n \geq 0$  : posons  $\mathcal{P}(n)$  : «  $u_n$  est défini, et  $u_n > 0$  » .

• **Initialisation** : d'après l'énoncé,  $u_0$  est défini et  $u_0 = 1 > 0$  :  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

• **Hérédité** : soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé, on suppose que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.

On a donc, en particulier,  $u_n \neq 0$  :  $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$  est bien défini ; et comme  $u_n > 0$  on a

également  $\frac{1}{u_n} > 0$ , et donc  $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} > 0$  : on a bien  $\mathcal{P}(n+1)$ .

• **Conclusion** :  $\mathcal{P}(n)$  est bien vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- (b) **En déduire le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .**

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$  d'après le résultat précédent : la suite  $(u_n)$  est donc strictement croissante.

- (c) **On suppose que  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ . Quelle équation vérifie alors  $\ell$  ? Que peut-on en déduire sur la suite  $(u_n)$  ?**

Supposons que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$ . Comme  $u_0 = 1$  et  $(u_n)$  croissante, on en déduit que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$  ; et donc  $\ell \geq 1 > 0$ . Alors  $\frac{1}{u_n} \rightarrow \frac{1}{\ell}$ , et la relation de récurrence définissant  $(u_n)$  donne en passant à la limite  $\ell = \ell + \frac{1}{\ell}$ , ou encore  $\frac{1}{\ell} = 0$  : c'est impossible.

On en déduit que  $(u_n)$  ne converge pas. Comme elle est croissante, on peut finalement conclure que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

4. (a) **Pour tout entier  $k$ , exprimer  $u_{k+1}^2 - u_k^2$  en fonction de  $u_k^2$ .**

Un calcul direct donne :

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_{k+1}^2 - u_k^2 = \left(u_k + \frac{1}{u_k}\right)^2 - u_k^2 = 2 + \frac{1}{u_k^2}$$

- (b) **En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$ .**

Pour tout  $n \geq 1$  : on somme l'égalité précédente pour  $k$  allant de 0 à  $n-1$ .

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^2 - u_k^2) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(2 + \frac{1}{u_k^2}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} 2 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$$

On reconnaît dans le terme de gauche une somme télescopique :

$$u_n^2 - u_0^2 = 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$$

et avec  $u_0 = 1$  on obtient finalement :

$$u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$$

- (c) **Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n^2 \geq 2n + 1$ . Retrouver à l'aide de ce résultat la limite de la suite  $(u_n)$ .**

Comme on a :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \geq 0$  (somme de carrés), on déduit de la question précédente que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n^2 \geq 2n + 1$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n + 1 = +\infty$  : par minoration on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ , ce qui redonne bien le résultat obtenu précédemment.

5. (a) **À l'aide de l'inégalité de la question 4c, montrer que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2 :**

$$u_n^2 \leq 2n + 2 + \frac{1}{2} v_{n-1}$$

$\forall k \geq 1$ , on a  $u_k^2 \geq 2k + 1$  donc  $\frac{1}{u_k^2} \leq \frac{1}{2k+1} \leq \frac{1}{2k}$ .

En reprenant l'expression de 4b :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n^2 &= 2n + 1 + \frac{1}{u_0^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \leq 2n + 1 + 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k} \\ &\leq 2n + 2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \\ u_n^2 &\leq 2n + 2 + \frac{1}{2} v_{n-1} \end{aligned}$$

(NB : on a séparé le terme  $k = 0$  de la somme car la majoration  $\frac{1}{u_k^2} \leq \frac{1}{2k}$  n'est pas valide dans ce cas).

(b) **Montrer que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2 :**

$$u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}$$

Avec la majoration de  $v_n$  obtenue en ??, on a :

$$\forall n \geq 2, u_n^2 \leq 2n + 2 + \frac{1}{2}(1 + \ln(n-1)) = 2n + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\ln(n-1)$$

(c) **En déduire finalement que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2n}$ .**

On a finalement, en regroupant les résultats de 4c et 5b :

$$\forall n \geq 2, 2n + 1 \leq u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\ln(n-1)$$

En divisant par  $2n > 0$  :

$$\forall n \geq 2, 1 + \frac{1}{2n} \leq \frac{u_n^2}{2n} \leq 1 + \frac{5}{4n} + \frac{1}{4} \frac{\ln(n-1)}{n}$$

Les deux termes extrêmes de cet encadrement tendent vers 1 (par croissances comparées pour le terme en  $\frac{\ln(n-1)}{n}$ ), donc par gendarmes,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^2}{2n} = 1$ , soit encore

$$u_n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2n$$

et en passant à la racine ( $u_n > 0$ ) :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2n}$$

## Exercice 2 (DM2bis)

Soit  $E = \mathbb{R}_3[x]$ . On définit l'application  $t$  de la manière suivante : pour tout  $P \in E$ ,  $t(P)$  est le polynôme obtenu en remplaçant  $X$  par  $X + 1$  dans l'expression de  $P(X)$ .

Par exemple si  $P = X^2$ ,  $t(P) = (X + 1)^2$  ; si  $P = 1$  (polynôme constant)  $t(P) = 1$ .

1. **Montrer que l'application  $t$  est un endomorphisme de  $E$  ; donner sa matrice dans la base canonique de  $E$ . On note  $T$  cette matrice.**

Si  $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ , alors  $t(P) = A(X + 1)^3 + b(X + 1)^2 + c(X + 1) + d \in \mathbb{R}_3[x]$  ; ainsi  $t$  va bien de  $\mathbb{R}_3[x]$  dans lui-même.

Soient maintenant  $(P, Q) \in \mathbb{R}_3[x]^2$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  ; on a :

$$t(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(X + 1) = \lambda P(X + 1) + Q(X + 1) = \lambda t(P) + t(Q)$$

ce qui montre la linéarité ;  $t$  est donc bien un endomorphisme de  $\mathbb{R}_3[x]$ .

Avec  $\{1, X, X^2, X^3\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}_3[x]$  :

- $t(1) = 1$
- $t(X) = X + 1 = 1 + X$
- $t(X^2) = (X + 1)^2 = 1 + 2X + X^2$
- $t(X^3) = (X + 1)^3 = 1 + 3X + 3X^2 + X^3$

d'où la matrice de  $t$  dans la base canonique :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si  $P$  est noté  $P(X)$ , on pourra noter  $t(P) = P(X + 1)$ . Ainsi, si  $P(X) = X^2 - 2$ ,  $P(X + 1) = (X + 1)^2 - 2 = X^2 - 2X - 1$ .

2. **On définit  $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  par  $\Delta = t - \text{Id}$ , où  $\text{Id}$  est l'identité de  $\mathbb{R}_3[X]$ . Déterminer la matrice de  $\Delta$  dans la base canonique.**

La matrice de  $\text{Id}$  étant  $I_4$ , la matrice de  $\Delta$  est  $T - I_4$ .

3. **Donner Ker( $\Delta$ ) et Im( $\Delta$ ).**

On peut utiliser  $D = \text{Mat}(\Delta, \mathcal{B}_c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \text{Ker}(\Delta) &\Leftrightarrow D \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b + c + d = 0 \\ 2c + 3d = 0 \\ 3d = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow b = c = d = 0 \end{aligned}$$

d'où

$$\text{Ker}(\Delta) = \text{Vect}(1)$$

(ensemble des polynômes constants).

Le théorème du rang appliqué à  $\Delta$  (endomorphisme de  $\mathbb{R}_3[x]$ , de dimension 4) donne  $\text{rg}(\Delta) = 3$ . Or on voit rapidement que  $\text{Im}(\Delta) \subset \mathbb{R}_2[x]$  et avec l'égalité des dimensions on conclut

$$\text{Im}(\Delta) = \mathbb{R}_2[x]$$

4. **Montrer que si  $\deg(P) = k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ , alors  $\deg(\Delta(P)) = k - 1$ .**

Si  $\deg(P) = k$  et qu'on note  $P = \sum_{i=0}^l a_i X^i$  ( $a_k$  est non nul), alors  $t(P) = \sum_{i=0}^k a_i (X+1)^i$  et

$$\Delta(P) = t(P) - P = \sum_{i=0}^k (a_i (X+1)^i - a_i X^i)$$

En développant les  $(X+1)^i$  on voit qu'il y a deux termes en  $X^k$  :  $a_k X^k - a_k X^k = 0$  ; et trois termes en  $X^{k-1}$  :  $k a_k X^{k-1} + a_{k-1} X^k - a_{k-1} X^{k-1} = k a_k X^{k-1}$  et avec  $a_k \neq 0$  ce terme est non nul. On peut alors affirmer que ce polynôme est de degré  $k - 1$ .

Ou alors on peut y aller à la main :

- si  $\deg(P) = 1$ ,  $P = aX + b$  avec  $a \neq 0$  :  $t(P) = a(X+1) + b$  et donc  $\Delta(P) = a$  est de degré 0
- si  $\deg(P) = 2$ ,  $P = aX^2 + bX + c$  avec  $a \neq 0$  :  $t(P) = a(X+1)^2 + b(X+1) + c$  et donc  $\Delta(P) = 2aX + a + b$  est de degré 1
- si  $\deg(P) = 3$ ,  $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$  avec  $a \neq 0$  :  $t(P) = a(X+1)^3 + b(X+1)^2 + c(X+1) + d$  et donc  $\Delta(P) = 3aX^2 + 3aX + a + 2bX + b + c$  est de degré 2

5. **Montrer que  $\Delta^4$  est l'endomorphisme nul.**

Intuitivement,  $\Delta$  fait baisser le degré de 1 ; si on part d'un degré  $\geq 3$  et qu'on applique  $\Delta$  4 fois on arrive au polynôme nul.

Un peu plus rigoureusement : si  $P$  est de degré  $k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ , alors  $\Delta^k(P)$  est de degré 0 et donc  $\Delta^{k+1}(P)$  est nul. Avec  $k+1 \leq 4$ , dans tous les cas  $\Delta^4(P)$  est nul.

Si  $P$  est de degré 0,  $\Delta(P)$  est nul et donc  $\Delta^4(P)$  l'est aussi.

$\Delta^4$  est donc bien l'endomorphisme nul.

6. **En déduire que  $T^4 - 4T^3 + 6T^2 - 4T + I_4 = 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$ .**

On a noté  $D$  la matrice de  $\Delta$  dans la base canonique : d'après la question précédente on a  $D^4 = 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$ .

Or  $D = T - I_4$  ; on a donc  $(T - I_4)^4 = 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$ .  $T$  et  $I_4$  commutent, on peut donc appliquer le binôme de Newton et on obtient

$$T^4 - 4T^3 + 6T^2 - 4T + I_4 = 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$$

7. Déterminer 4 réels  $a, b, c, d$  tels que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[x], P(X+4) = aP(X+3) + bP(X+2) + cP(X+1) + dP(X)$$

Cette dernière égalité se traduit, en notant  $\tilde{0}$  l'endomorphisme nul, en :

$$t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + \text{Id} = \tilde{0}$$

Voyons l'effet de  $t^k$  sur un polynôme. Si  $t(P) = P(X+1)$ , alors

$$t^2(P) = t(t(P)) = t(P(X+1)) = P(X+1+1) = P(X+2)$$

et de même

$$t^3(P) = P(X+1) \quad , \quad t^4(P) = P(X+4)$$

Ainsi  $t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + \text{Id}$  est l'endomorphisme qui associe à  $P$  le polynôme

$$P(X+4) - 4P(X+3) + 6P(X+2) - 4P(X+1) + P(X)$$

et comme on a affaire à l'endomorphisme nul, ce dernier polynôme est nul !

Récapitulons : pour tout  $P \in \mathbb{R}_3[x]$ , on a  $P(X+4) - 4P(X+3) + 6P(X+2) - 4P(X+1) + P(X) = 0$  ce qui s'écrit encore

$$P(X+4) = 4P(X+3) - 6P(X+2) + 4P(X+1) - P(X)$$

donc  $a = 4, b = -6, c = 4, d = -1$  répondent à la question.

### Exercice 3 (DM 2bis) : démonstration du théorème du rang

On considère ici une application linéaire de  $E$  (ev de dimension  $p$ ) dans  $F$  (ev de dimension  $n$ ) ; et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

On note  $r = \text{rg}(f)$ .

1. Soit  $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_p)$  une base de  $E$ . Donner une famille génératrice de  $\text{Im}(f)$  ; en déduire que  $r \leq \dim(E)$ .

On sait que  $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(x_1), \dots, f(x_p))$ .

La famille  $(f(x_1), \dots, f(x_p))$  est donc génératrice de  $\text{Im}(f)$  ; comme elle comporte  $p$  vecteurs, on a  $\dim(\text{Im}(f)) \leq p$  ; donc  $r \leq \dim(E)$ .

Soit  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$  une base de  $\text{Im}(f)$ . Il existe donc, pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $e_i \in E$  tel que  $f(e_i) = \varepsilon_i$ .

2. Montrer que  $(e_1, \dots, e_r)$  est libre.

On pourra considérer une combinaison linéaire nulle des  $e_i$ , puis prendre son image par  $f$ .

Soient  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  des réels tels que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0_E$ .

On prend l'image par  $f$  ; par linéarité, on a :

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) &= f(0_E) \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i f(e_i) &= 0_F \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon_i &= 0_F \end{aligned}$$

Or la famille  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$  est libre (c'est une base de  $\text{Im}(f)$ ) ; donc tous les  $\lambda_i$  sont nuls.

On a bien montré que  $(e_1, \dots, e_r)$  est libre.

3. Montrer que  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_r) \cap \text{Ker}(f) = \{0_E\}$ .

Soit un vecteur  $x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_r) \cap \text{Ker}(f)$ .

- Comme  $x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$ , on peut écrire  $x$  sous la forme :  $x = \sum_{i=1}^r \alpha_i e_i$ , où les  $\alpha_i$  sont des réels ;

- Comme  $x \in \text{Ker}(f)$ , on a  $f(x) = 0_F$ .

Il vient alors

$$f\left(\sum_{i=1}^r \alpha_i e_i\right) = 0_F = \sum_{i=1}^r \alpha_i f(e_i) \quad \text{par linéarité de } f$$

et par le même argument que précédemment, les  $\alpha_i$  sont nuls ; donc  $x$  est nul.

On a donc  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_r) \cap \text{Ker}(f) \subset \{0_E\}$ . Comme d'autre part  $0_E$  appartient à  $\text{Ker}(f)$  et à  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$  (ce sont des sev), on peut conclure que

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_r) \cap \text{Ker}(f) = \{0_E\}$$

**4. En déduire que, si  $(u_1, \dots, u_k)$  est une base de  $\text{Ker}(f)$ , la famille  $(e_1, \dots, e_r, u_1, \dots, u_k)$  est libre.**

On considère des  $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_k$  tels que

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^k \beta_i u_i = 0_E$$

On peut alors écrire

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i e_i = - \sum_{i=1}^k \beta_i u_i$$

et si on appelle  $x = \sum_{i=1}^r \alpha_i e_i$ , on a  $x \in \text{Vect}(e_i)$  ; mais aussi  $x \in \text{Vect}(u_i) = \text{Ker}(f)$  ; et donc  $x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_r) \cap \text{Ker}(f)$ .

D'après la question précédente, on en conclut  $x = 0_E$ .

En reprenant les calculs précédents, on a montré que

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i e_i = 0_E \quad \text{et} \quad - \sum_{i=1}^k \beta_i u_i = 0_E$$

et par liberté des  $(e_i)$  (respectivement : des  $(u_i)$ ), on en déduit que les  $\alpha_i$  sont nuls (respectivement : les  $\beta_i$ ).

Comme tous les coefficients introduits sont nuls, la famille  $(e_1, \dots, e_r, u_1, \dots, u_k)$  est libre.

**On va maintenant chercher à montrer que cette famille est génératrice de E.**

**5. Soit  $x \in E$ . Montrer qu'il existe des réels  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$  tels que**

$$f(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \varepsilon_i$$

Par définition,  $f(x) \in \text{Im}(f)$  ; comme  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$  est une base de  $\text{Im}(f)$ ,  $f(x)$  peut se décomposer sur cette base.

Il existe donc  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$  tels que  $f(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \varepsilon_i$ .

**6. Montrer alors que :  $x - \sum_{i=1}^r \lambda_i e_i \in \text{Ker}(f)$  ; puis finalement que**

$$x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_r, u_1, \dots, u_k)$$

On calcule :

$$\begin{aligned} f\left(x - \sum_{i=1}^r \lambda_i e_i\right) &= f(x) - \sum_{i=1}^r \lambda_i f(e_i) \quad \text{par linéarité de } f \\ &= f(x) - \sum_{i=1}^r \lambda_i \varepsilon_i \\ &= 0_F \end{aligned}$$



et on a bien  $x - \sum_{i=1}^r \lambda_i e_i \in \text{Ker}(f)$ .

Comme  $(u_1, \dots, u_k)$  est une base de  $\text{Ker}(f)$ , notre vecteur ci-dessus peut se décomposer sur cette base : il existe donc  $\mu_1, \dots, \mu_k$  tels que

$$x - \sum_{i=1}^r \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^k \mu_i u_i$$

ce qui donne

$$x = \sum_{i=1}^r \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^k \mu_i u_i \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_r, u_1, \dots, u_k)$$

**On peut maintenant conclure.**

**7. Montrer que  $(e_1, \dots, e_r, u_1, \dots, u_k)$  est une base de E.**

La question 4 montre que la famille  $(e_1, \dots, e_r, u_1, \dots, u_k)$  est libre ; de plus, d'après la question 6, tout vecteur de E appartient à  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_r, u_1, \dots, u_k)$ , et cette dernière famille est donc génératrice de E.  $(e_1, \dots, e_r, u_1, \dots, u_k)$  est donc bien une base de E.

**8. En déduire le théorème du rang.**

On a donc  $\dim(E) = \text{Card}((e_1, \dots, e_r, u_1, \dots, u_k)) = r + k$ .

Par définition,  $r = \text{rg}(f)$  ; et  $(u_1, \dots, u_k)$  étant une base de  $\text{Ker}(f)$ ,  $\dim(\text{Ker}(f)) = k$ .

On a donc bien  $\dim(E) = \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f))$ .