

Devoir maison n°2
À rendre pour le jeudi 6/10 (sans faute !!)

Exercice 1 (algèbre linéaire)

On note (i, j, k) la base canonique de \mathbb{R}^3 . Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par :

$$\begin{cases} f(i) = i + k \\ f(j) = -i + j - 3k \\ f(k) = j - 2k \end{cases}$$

1. Donner $\text{Mat}(f, \mathcal{B}_c)$. On note cette matrice A .
2. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{rg}(f)$.
3. Calculer les vecteurs $f^2(i), f^2(j), f^2(k), f^3(i), f^3(j), f^3(k)$.
On réfléchira à une manière rapide de répondre à cette question en utilisant A .
4. Montrer que $(i, f(i), f^2(i))$ est une base de \mathbb{R}^3 .

Soit g un endomorphisme de \mathbb{R}^3 tel que $f \circ g = g \circ f$.

5. Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $g(i) = ai + bf(i) + cf^2(i)$.
6. Montrer qu'alors $g = a\text{Id}_{\mathbb{R}^3} + bf + cf^2$.
On rappelle que deux endomorphismes sont égaux ssi ils coïncident sur une base de E .
7. En déduire l'ensemble des endomorphismes de \mathbb{R}^3 tels que $f \circ g = g \circ f$.

Exercice 2 (étude d'une suite récurrente)

On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Montrer : $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$. En déduire : $\forall n \geq 1, \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \leq -\frac{1}{n+1}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $v_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}$, puis que : $v_n \leq \ln(n) + 1$.

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \end{cases}$$

3. (a) Montrer par récurrence que chaque terme de cette suite est défini et strictement positif.
(b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
(c) On suppose que (u_n) converge vers ℓ . Quelle équation vérifie alors ℓ ? Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ?
4. (a) Pour tout entier k , exprimer $u_{k+1}^2 - u_k^2$ en fonction de u_k^2 .
(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$.
(c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n^2 \geq 2n + 1$. Retrouver à l'aide de ce résultat la limite de la suite (u_n) .
5. (a) À l'aide de l'inégalité de la question 4c, montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$u_n^2 \leq 2n + 2 + \frac{1}{2}v_{n-1}$$

- (b) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}$$

- (c) En déduire finalement que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2n}$.