

## Devoir maison n°2bis À rendre pour le jeudi 6/10 (sans faute !!)

### Exercice 1 (étude d'une suite récurrente)

On pose, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1,  $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

1. Montrer :  $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$ . En déduire :  $\forall n \geq 1, \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \leq -\frac{1}{n+1}$ .
2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , montrer que  $v_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}$ , puis que :  $v_n \leq \ln(n) + 1$ .

On considère la suite  $(u_n)$  définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \end{cases}$$

3. (a) Montrer par récurrence que chaque terme de cette suite est défini et strictement positif.  
(b) En déduire le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .  
(c) On suppose que  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ . Quelle équation vérifie alors  $\ell$  ? Que peut-on en déduire sur la suite  $(u_n)$  ?
4. (a) Pour tout entier  $k$ , exprimer  $u_{k+1}^2 - u_k^2$  en fonction de  $u_k^2$ .  
(b) En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$ .  
(c) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n^2 \geq 2n + 1$ . Retrouver à l'aide de ce résultat la limite de la suite  $(u_n)$ .
5. (a) À l'aide de l'inégalité de la question 4c, montrer que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2 :

$$u_n^2 \leq 2n + 2 + \frac{1}{2}v_{n-1}$$

- (b) Montrer que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2 :

$$u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}$$

- (c) En déduire finalement que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2n}$ .

### Exercice 2

Soit  $E = \mathbb{R}_3[x]$ . On définit l'application  $t$  de la manière suivante : pour tout  $P \in E$ ,  $t(P)$  est le polynôme obtenu en remplaçant  $X$  par  $X+1$  dans l'expression de  $P(X)$ .

Par exemple si  $P = X^2$ ,  $t(P) = (X+1)^2$  ; si  $P = 1$  (polynôme constant)  $t(P) = 1$ .

1. Montrer que l'application  $t$  est un endomorphisme de  $E$  ; donner sa matrice dans la base canonique de  $E$ . On note  $T$  cette matrice.

Si  $P$  est noté  $P(X)$ , on pourra noter  $t(P) = P(X+1)$ . Ainsi, si  $P(X) = X^2 - 2$ ,  $P(X+1) = (X+1)^2 - 2 = X^2 - 2X - 1$ .

2. On définit  $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  par  $\Delta = t - \text{Id}$ , où  $\text{Id}$  est l'identité de  $\mathbb{R}_3[X]$ . Déterminer la matrice de  $\Delta$  dans la base canonique.
3. Donner  $\text{Ker}(\Delta)$  et  $\text{Im}(\Delta)$ .
4. Montrer que si  $\deg(P) = k \in [1, 3]$ , alors  $\deg(\Delta(P)) = k - 1$ .
5. Montrer que  $\Delta^4$  est l'endomorphisme nul.
6. En déduire que  $T^4 - 4T^3 + 6T^2 - 4T + I_4 = 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$ .
7. Déterminer 4 réels  $a, b, c, d$  tels que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[x], P(X+4) = aP(X+3) + bP(X+2) + cP(X+1) + dP(X)$$

### Exercice 3 : démonstration du théorème du rang

On considère ici une application linéaire de  $E$  (ev de dimension  $p$ ) dans  $F$  (ev de dimension  $n$ ) ; et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .  
On note  $r = \text{rg}(f)$ .

1. Soit  $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_p)$  une base de  $E$ . Donner une famille génératrice de  $\text{Im}(f)$  ; en déduire que  $r \leq \dim(E)$ .

Soit  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$  une base de  $\text{Im}(f)$ . Il existe donc, pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $e_i \in E$  tel que  $f(e_i) = \varepsilon_i$ .

2. Montrer que  $(e_1, \dots, e_r)$  est libre.  
*On pourra considérer une combinaison linéaire nulle des  $e_i$ , puis prendre son image par  $f$ .*
3. Montrer que  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_r) \cap \text{Ker}(f) = \{0_E\}$ .
4. En déduire que, si  $(u_1, \dots, u_k)$  est une base de  $\text{Ker}(f)$ , la famille  $(e_1, \dots, e_r, u_1, \dots, u_k)$  est libre.

On va maintenant chercher à montrer que cette famille est génératrice de  $E$ .

5. Soit  $x \in E$ . Montrer qu'il existe des réels  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$  tels que

$$f(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \varepsilon_i$$

6. Montrer alors que :  $x - \sum_{i=1}^r \lambda_i e_i \in \text{Ker}(f)$  ; puis finalement que

$$x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_r, u_1, \dots, u_k)$$

On peut maintenant conclure.

7. Montrer que  $(e_1, \dots, e_r, u_1, \dots, u_k)$  est une base de  $E$ .
8. En déduire le théorème du rang.