

## Devoir maison n°3 À rendre pour le 25/11

### Exercice 1

Soient A et B indépendantes, suivant la même loi  $\mathcal{U}([1, n])$ . Donner les lois de  $\min(A, B)$  et  $\max(A, B)$ .

### Exercice 2

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité  $\frac{2}{3}$  et Face avec la probabilité  $\frac{1}{3}$ .

#### Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de Face obtenus avant l'obtention du deuxième Pile.

- (a) Décrire les événements  $[X = 0]$ ,  $[X = 1]$ ,  $[X = 2]$  puis calculer leurs probabilités.  
(b) Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, P([X = n]) = (n + 1) \frac{4}{3^{n+2}}$ .

#### Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; puis en fonction du nombre  $n$  de Face obtenus, on place  $n + 1$  boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à  $n$  et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule dans cette urne.

On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus, et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. On pose  $V = X - U$ .

- (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire U.  
(b) Déterminer, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , la loi conditionnelle de U sachant  $[X = n]$ .  
(c) En déduire, pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$  :

$$P([U = k]) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P([X = n]) \quad \text{puis} \quad P([U = k]) = \frac{2}{3^{k+1}}.$$

- (d) Montrer que U admet une espérance et une variance et les calculer.
- (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable V.  
(b) Déterminer, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , la loi conditionnelle de V sachant  $[X = n]$ .  
(c) En déduire la loi de V.
- Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.

#### Partie III : Étude d'un jeu

Dans cette partie,  $p$  désigne un réel de  $]0, 1[$ .

Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face dont les règles sont les suivantes :

- le joueur A dispose d'une pièce amenant Pile avec la probabilité  $\frac{2}{3}$  et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; on note X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- le joueur B dispose d'une autre pièce amenant Pile avec la probabilité  $p$  et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile ; on note Y la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- Le joueur A gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui de B ; sinon c'est le joueur B qui gagne.

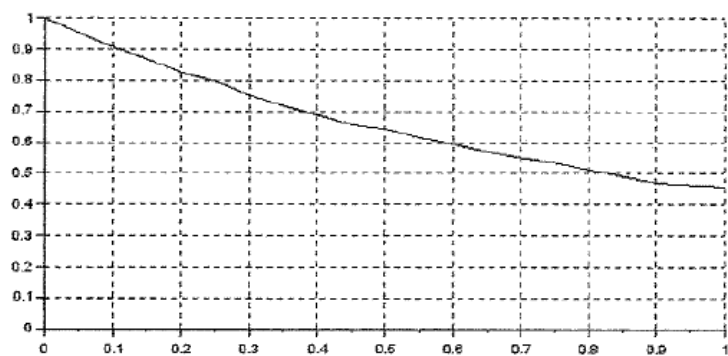
On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

## 1. Simulation informatique

- (a) Écrire une fonction Python `simule_X` qui simule la variable aléatoire  $X$ .
- (b) On suppose que l'on dispose d'une fonction `simule_Y` qui, prenant en argument un réel  $p$  de  $]0;1[$ , simule la variable aléatoire  $Y$ . Expliquer ce que renvoie la fonction suivante :

```
def mystere(p):  
    r = 0  
    N = 10000  
    for k in range(N):  
        x = simule_X()  
        y = simule_Y(p)  
        if x <= y:  
            r = r + 1/N  
    return r
```

- (c) On trace, en fonction de  $p$ , une estimation de la probabilité que A gagne et on obtient le graphe suivant :



À la vue de ce graphe, conjecturer une valeur de  $p$  pour lequel le jeu serait équilibré.

## 2. Étude de la variable aléatoire $Y$

On note  $Z$  la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de lancers effectués par le joueur B.

- (a) Reconnaître la loi de  $Z$  et préciser son(ses) paramètre(s), son espérance et sa variance.
- (b) Exprimer  $Y$  à l'aide de  $Z$  et en déduire l'existence de l'espérance et de la variance de  $Y$  et préciser leurs valeurs.
- (c) Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, P([Y \geq n]) = (1 - p)^n$ .
3. (a) Montrer :  $P([X \leq Y]) = \sum_{n=0}^{+\infty} P([X = n])P([Y \geq n])$ .
- (b) Déduire des résultats précédents :  $P([X \leq Y]) = \frac{4}{(2+p)^2}$ .
- (c) Déterminer la valeur de  $p$  pour laquelle le jeu est équilibré.