

Devoir maison n°3bis À rendre pour le 25/11

Exercice 1

On admet dans cet exercice que, pour tout réel $x \in]1, 1[$, la série de terme général $\frac{x^k}{k}$ converge absolument, et que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$$

Préliminaires

1. Rappeler la formule du triangle de Pascal, qui relie les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$, $\binom{n-1}{k-1}$, $\binom{n-1}{k}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout entier $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a : $\binom{n}{r} = \sum_{k=r}^n \binom{k-1}{r-1}$ (on utilisera une somme télescopique).

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans cette partie sont définies sur un même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

Soit p un réel de $]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$, et on considère une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N}^* , qui suit la loi géométrique de paramètre p .

3. Rappeler les valeurs de l'espérance $E(X)$ et de la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X .
4. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \frac{1}{X}$.
 - (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par Y ainsi que la loi de probabilité de Y .
 - (b) Montrer que Y admet une espérance $E(Y)$, que l'on calculera en fonction de p et q .
 - (c) Pour tout entier i supérieur ou égal à 2, établir l'existence de $E(Y^i)$ (moment d'ordre i de Y).
5. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans \mathbb{N}^* , qui suivent la même loi géométrique de paramètre p . On pose : $S_1 = X_1$, $S_2 = X_1 + X_2$, $Y_2 = \frac{2}{S_2}$.
 - (a) Déterminer la loi de probabilité de chacune des variables aléatoires S_2 et Y_2 .
 - (b) Établir l'existence de l'espérance $E(Y_2)$ de la variable aléatoire Y_2 .
 - (c) Calculer cette espérance en fonction de p et q .
6. Soient $n \geq 2$, et (X_1, \dots, X_n) n variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N}^* , indépendantes, de même loi géométrique de paramètre p . Pour tout entier n de \mathbb{N}^* , on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.
 - (a) Calculer l'espérance $E(S_n)$ et la variance $V(S_n)$ de la variable aléatoire S_n .
 - (b) Montrer, par récurrence sur n , que la loi de probabilité de la variable aléatoire S_n est donnée, pour tout entier $s \in \mathbb{N}^*$, par :

$$\text{si } s < n, P(S_n = s) = 0; \quad \text{si } s \geq n, P(S_n = s) = \binom{s-1}{n-1} p^n q^{s-n}.$$

7. Pour tout entier n de \mathbb{N}^* , on pose $Y_n = \frac{n}{S_n}$.

(a) Préciser l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire Y_n ainsi que la loi de probabilité de Y_n .

(b) Soit t un réel quelconque de $[0, 1[$. Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, la série $\left(\sum_{s \geq 1} s^m t^s\right)$, est convergente.

En déduire, en particulier, l'existence des moments d'ordre 1 et 2, $E(Y_n)$ et $E(Y_n^2)$ de la variable aléatoire Y_n .

Exercice 2

On dispose d'une pièce équilibrée, qu'on lance de manière répétée. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire qui vaut 1 si la pièce donne Face au n -ième lancer, et 0 si elle donne Pile au n -ième lancer.

Soit $p \in [0, 1]$ quelconque ; on souhaite, à partir de lancers indépendants de cette pièce, créer une expérience de Bernoulli de probabilité de succès p .

1. Proposer une expérience pour $p = \frac{1}{4}$; puis pour $p = \frac{1}{2^n}$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.

2. On s'intéresse au protocole suivant: « On jette la pièce jusqu'à l'obtention d'un Face. Si le premier Face est obtenu lors d'un lancer pair, on considère qu'il y a succès, sinon il y a échec ».

On note S_n : « obtenir un succès au n -ième lancer », et S : « obtenir un succès ». Donner $P(S_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; en déduire que $P(S) = \frac{1}{3}$.

On considère maintenant un réel p qui s'écrit sous la forme :

$$p = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n} \quad \text{où : } \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \in \{0, 1\}$$

3. Montrer que la série définissant p est convergente.

4. (a) On jette la pièce jusqu'à l'obtention d'un Face. On note n le numéro du lancer correspondant à ce premier Face et on pose $Y = a_n$.

On note A_n l'événement : « on obtient le premier Face au n -ième lancer ». Vérifier que

$$P_{A_n}(Y = 1) = a_n$$

(on pourra discuter suivant les valeurs de a_n).

(b) En déduire que $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

(c) Que vaut a_n en fonction de n dans le cas de la question 2 ?

5. Application. Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{3+4n}} + \frac{1}{2^{4+4n}} \right) = \frac{1}{5}$$

En déduire un protocole expérimental renvoyant un « succès » (à définir) de probabilité $\frac{1}{5}$.

Remarque : on peut en fait montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ existe et est unique pour tout $p \in [0, 1]$: il s'agit du *développement binaire* de p .