

Devoir maison n°4bis Une propriété des chaînes de Markov (même si ça se voit pas encore)

NB : ce DM est difficile ; il sert surtout de préparation aux épreuves de mathématiques du Top 3.
Il est facultatif et je n'impose pas de date de rendu (mais n'attendez pas deux mois pour autant...).

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que M vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, m_{i,j} > 0$ (ie tous les coefficients de M sont strictement positifs).
- $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1$ (toutes les lignes de M sont de somme 1).

On rappelle l'inégalité triangulaire :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \quad ; \quad \text{et on a l'égalité ssi tous les } x_i \text{ sont de même signe.}$$

On rappelle aussi la formule du produit matriciel : si $M = (m_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, alors la i -ème composante de la colonne MX vaut $\sum_{j=1}^n m_{i,j} x_j$.

1. Soit $\lambda \in \text{Sp}(M)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé. On définit $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

(a) Montrer : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n m_{i,j} x_j = \lambda x_i$.

(b) Justifier que $|x_{i_0}| > 0$.

(c) À l'aide de l'inégalité triangulaire, montrer que $\left| \sum_{j=1}^n m_{i_0,j} x_j \right| \leq |x_{i_0}|$ et en déduire $|\lambda| \leq 1$.

2. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, dont toutes les composantes valent 1.
Calculer MX . En déduire que 1 est valeur propre de M .

3. Soit $\lambda \in \text{Sp}(M)$, avec $|\lambda| = 1$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé, et $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Montrer :

$$|x_{i_0}| = \left| \sum_{j=1}^n m_{i_0,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n m_{i_0,j} |x_j| \leq \left(\sum_{j=1}^n m_{i_0,j} \right) |x_{i_0}| = |x_{i_0}|$$

En déduire que tous les x_i sont de même signe.

4. Quitte à changer X en $-X$, on peut alors supposer que tous les x_i sont positifs. Montrer que $\lambda \geq 0$. Finalement, que vaut λ ?

On a donc montré que $\lambda = 1$ est valeur propre de M , et que toute autre valeur propre de M est dans $] -1, 1[$.

On considère maintenant une matrice N à coefficients strictement positifs, telle que :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \sum_{i=1}^n n_{i,j} = 1$$

(autrement dit, la somme de chaque colonne de N vaut 1).

5. Montrer que $M = {}^t N$ vérifie les hypothèses précédentes. En déduire que $\lambda = 1$ est valeur propre de N , et que toute autre valeur propre de N est dans $] -1, 1[$.
6. Soit X un vecteur propre de N associé à la valeur propre 1.
 X étant non nul, il existe un $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $x_k \neq 0$. Quitte à changer X en $-X$ on peut supposer $x_k > 0$.
 On suppose qu'il existe $\ell \neq k$ tel que $x_\ell < 0$.

(a) Montrer :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |x_i| = \left| \sum_{j=1}^n n_{i,j} x_j \right| < \sum_{j=1}^n n_{i,j} |x_j|$$

(on utilisera l'inégalité triangulaire et son cas d'égalité).

- (b) En sommant sur i cette dernière inégalité et en utilisant une interversion des signes somme, obtenir une absurdité.
- (c) Montrer que toutes les composantes de X sont strictement positives.

On examine maintenant la dimension de $E_1(N)$.

7. Soient U et V deux vecteurs propres associés à la valeur propre 1, de composantes respectives u_i et v_i .
 Montrer qu'il existe un unique $t \in \mathbb{R}$ tel que $tu_1 - v_1 = 0$.
8. Montrer que $tU - V \in E_1(N)$, puis montrer que U et V sont colinéaires.
9. Montrer que $\dim(E_1(N)) = 1$.
 En déduire qu'il existe un unique $E \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que :
 - $E_1(N) = \text{Vect}(E)$
 - les composantes de E sont strictement positives, et leur somme vaut 1.

On considère enfin des suites de matrices colonnes. Soit $(X_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que :

- $X_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, avec $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$.
- $\forall p \in \mathbb{N}, X_{p+1} = NX_p$.

On a alors clairement : $\forall p \in \mathbb{N}, X_p = N^p X_0$.

$$10. \text{ Soient } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ tels que } Y = NX. \text{ Montrer que } \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i.$$

11. En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la somme des composantes de X_p vaut 1.
12. On note $\text{Sp}(N) = \{1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, avec, pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $|\lambda_i| < 1$; et (E, E_2, \dots, E_n) une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que : $\forall i \geq 2, E_i \in E_{\lambda_i}(N)$ (E a été défini en question 9).
 Soient β_1, \dots, β_n les coordonnées de X_0 dans cette base. Montrer :

$$\forall p \in \mathbb{N}, X_p = \beta_1 E + \sum_{i=2}^n \beta_i \lambda_i^p E_i$$

puis que $\lim_{p \rightarrow +\infty} X_p = \beta_1 E$.

13. Montrer que les composantes de $\beta_1 E$ sont de somme égale à 1 (on pourra utiliser la question 10).
En déduire

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} X_p = E$$

Ainsi, toute suite de ce type converge vers l'unique générateur de $E_1(N)$ de somme de composantes égale à 1...
rendez-vous dans pas longtemps pour une interprétation probabiliste !