

Devoir maison n°5
À rendre pour le 6/02

Exercice 1 : Étude d'une intégrale

1. Montrer que l'intégrale $\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt$ est définie pour tout réel x . On considère désormais la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt$$

2. Établir que f est impaire.
3. (a) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
(b) Déterminer $f'(x)$, pour tout réel x , et en déduire que f est strictement croissante sur \mathbb{R} .
4. (a) En utilisant la relation $t^2 \leq t^2 + 1 \leq t^2 + 2t + 1$, valable pour tout t réel positif ou nul, montrer que l'on a l'encadrement suivant:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(2x+1) - \ln(x+1) \leq f(x) \leq \ln(2)$$

- (b) Donner alors la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
(c) Dresser le tableau de variation complet de f .
(d) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
5. (a) Montrer que pour tout réel x , on a : $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.
(b) Déterminer la dérivée de la fonction h qui, à tout réel x associe $\ln(x + \sqrt{x^2+1})$.
(c) En déduire l'expression explicite de $f(x)$.
6. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de 0.

(a) Établir que, pour tout réel x strictement positif, on a : $x - f(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}(1+\sqrt{t^2+1})} dt$

- (b) En déduire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leq x - f(x) \leq \frac{7}{6} x^3$$

- (c) Conclure que $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} x$.
(d) Montrer que l'on a aussi : $f(x) \underset{x \rightarrow 0^-}{\sim} x$.

Exercice 2 : Intégrales et séries

Dans cet exercice, x désigne un réel de $[0, 1[$.

1. (a) Montrer que : $\forall m \in \mathbb{N}, 0 \leq \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} dt \leq \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1}$.
(b) En déduire que : $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} dt \right) = 0$.
2. (a) Pour tout réel t de $[0, 1[$ et pour tout k élément de \mathbb{N}^* , calculer $\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j}$.
(b) En déduire que : $\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt$.

(c) Utiliser la question 1 pour montrer que la série de terme général $\frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ converge et exprimer $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ sous forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

(d) Conclure que : $\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt$.

3. Par une méthode similaire, montrer qu'on a aussi : $\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{x^{2j}}{2j} = \int_0^x \frac{t^{2k+1}}{1-t^2} dt$.