

Devoir maison n°5 Corrigé

Exercice 1 : Étude d'une intégrale

1. **Montrer que l'intégrale $\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt$ est définie pour tout réel x . On considère désormais la fonction f définie par :**

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t^2 + 1 > 0$, donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ est définie et continue sur \mathbb{R} , donc sur tout intervalle $[x, 2x]$ avec x réel. On en déduit l'existence de cette intégrale.

2. **Établir que f est impaire.**

f est définie sur \mathbb{R} , ensemble centré en 0.

Pour tout réel x on a, en effectuant le changement de variable $u = -t$:

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{(-u)^2+1}} (-du) = - \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} du = -f(x)$$

f est donc impaire.

3. (a) **Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .**

Notons $g : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$, et G une primitive de g sur \mathbb{R} . Alors $f(x) = G(2x) - G(x)$. f est donc dérivable sur \mathbb{R} comme composée de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 2g(2x) - g(x)$. g étant continue sur \mathbb{R} , f' l'est aussi et donc f est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

- (b) **Déterminer $f'(x)$, pour tout réel x , et en déduire que f est strictement croissante sur \mathbb{R} .**

D'après la question précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2g(2x) - g(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{(x^2+1)(4x^2+1)}} = \frac{\sqrt{4x^2+4} - \sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{(x^2+1)(4x^2+1)}}$$

Le dénominateur de cette expression est toujours > 0 . D'autre part, pour tout réel x , $4x^2+4 > 4x^2+1$, et donc par stricte croissance de $\sqrt{\cdot}$ sur \mathbb{R}_+ , $\sqrt{4x^2+4} > \sqrt{4x^2+1}$. Le numérateur est donc également toujours > 0 .

On déduit de tout cela : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$; f est donc strictement croissante sur \mathbb{R} .

4. (a) **En utilisant la relation $t^2 \leq t^2 + 1 \leq t^2 + 2t + 1$, valable pour tout t réel positif ou nul, montrer que l'on a l'encadrement suivant:**

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(2x+1) - \ln(x+1) \leq f(x) \leq \ln(2)$$

On se sert de cette relation pour encadrer $f(t)$: pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{1}{\sqrt{t^2+2t+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{t^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(t+1)^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{t^2}}$$

$$\frac{1}{t+1} \leq \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \leq \frac{1}{t}$$

(en utilisant : $\forall a \in \mathbb{R}, \sqrt{a^2} = |a|$, et le fait que t et $t+1$ soient positifs dans notre calcul).

Soit $x > 0$: on intègre alors cet encadrement sur $[x, 2x] \subset \mathbb{R}_+^*$ (avec $x \leq 2x$ donc les bornes d'intégration sont dans le bon sens) :

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t+1} dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$$

$$\left[\ln(t+1) \right]_x^{2x} \leq f(x) \leq \left[\ln(t) \right]_x^{2x}$$

$$\ln(2x+1) - \ln(x+1) \leq f(x) \leq \ln(2x) - \ln(x) = \ln 2$$

(b) **Donner alors la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.**

On a vu :

$$\forall x > 0, \ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) \leq f(x) \leq \ln 2$$

Pour $x \rightarrow +\infty$, les deux bornes de cet encadrement tendent vers $\ln 2$. Par théorème des gendarmes, on a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln(2)$.

(c) **Dresser le tableau de variation complet de f .**

f est strictement croissante sur \mathbb{R} . f est impaire donc $f(0) = 0$, et on déduit de la limite précédente que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\ln 2$.

On obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\ln(2)$	0	$\ln(2)$

(d) **Résoudre l'équation $f(x) = 0$.**

Par stricte monotonie de f le tableau montre que la seule solution de $f(x) = 0$ est $x = 0$.

5. (a) **Montrer que pour tout réel x , on a : $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.**

On peut étudier la fonction, ou plus simplement remarquer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x$, ce qui donne l'inégalité voulue.

(b) **Déterminer la dérivée de la fonction h qui, à tout réel x associe $\ln(x + \sqrt{x^2+1})$.**

Cette fonction est donc bien définie sur \mathbb{R} d'après la question précédente, et \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} comme composée de fonctions \mathcal{C}^1 .

Par calcul direct :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{x\sqrt{x^2+1} + x^2 + 1} = \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}(x + \sqrt{x^2+1})} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

(c) **En déduire l'expression explicite de $f(x)$.**

h est donc une primitive sur \mathbb{R} de la fonction dans l'intégrale définissant f .

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = h(2x) - h(x) = \ln(2x + \sqrt{4x^2+1}) - \ln(x + \sqrt{x^2+1}) = \ln\left(\frac{2x + \sqrt{4x^2+1}}{x + \sqrt{x^2+1}}\right)$$

6. **Recherche d'un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de 0.**

(a) **Établir que, pour tout réel x strictement positif, on a : $x - f(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}(1 + \sqrt{t^2+1})} dt$**

Pour tout $x > 0$, on écrit (en se laissant orienter par le résultat à trouver) :

$$\begin{aligned} x - f(x) &= \int_x^{2x} 1 \, dt - \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \, dt = \int_x^{2x} \frac{\sqrt{t^2+1}-1}{\sqrt{t^2+1}} \, dt \\ &= \int_x^{2x} \frac{(\sqrt{t^2+1}-1)(\sqrt{t^2+1}+1)}{\sqrt{t^2+1}(\sqrt{t^2+1}+1)} \, dt \\ &= \int_x^{2x} \frac{(\sqrt{t^2+1})^2 - 1^2}{\sqrt{t^2+1}(\sqrt{t^2+1}+1)} \, dt \\ x - f(x) &= \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}(\sqrt{t^2+1}+1)} \, dt \end{aligned}$$

(b) **En déduire :**

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq x - f(x) \leq \frac{7}{6}x^3$$

On minore le dénominateur de l'intégrande : pour $t > 0$, on a $\sqrt{1+t^2} > 1$ et $1 + \sqrt{1+t^2} > 2$; de sorte que

$$\forall t \in [x, 2x], \quad 0 \leq \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}(\sqrt{t^2+1}+1)} \leq \frac{t^2}{2}$$

Et en intégrant sur $[x, 2x]$:

$$0 \leq x - f(x) \leq \frac{1}{2} \int_x^{2x} t^2 \, dt$$

La dernière intégrale est facile à calculer et donne bien le résultat demandé.

(c) **Conclure que** $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} x$.

Pour $x > 0$, on divise l'inégalité précédente par x pour obtenir :

$$\forall x > 0, \quad 0 \leq \frac{x - f(x)}{x} \leq \frac{7}{6}x^2$$

ce qui donne après quelques manipulations :

$$1 - \frac{7}{6}x^2 \leq \frac{f(x)}{x} \leq 1$$

En faisant tendre x vers 0, on trouve que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1$; donc $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} x$.

(d) **Montrer que l'on a aussi :** $f(x) \underset{x \rightarrow 0^-}{\sim} x$.

C'est une conséquence de l'impairité de f . En posant $y = -x$, on peut écrire $\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{f(-y)}{-y} = 1$ (car $-y \rightarrow 0^+$).

Or $f(-y) = -f(y)$: on obtient $\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{f(y)}{y} = 1$ ce qui donne bien $f(x) \underset{x \rightarrow 0^-}{\sim} x$.

Exercice 2 : Intégrales et séries

Dans cet exercice, x désigne un réel de $[0, 1[$.

$$1. \quad (a) \text{ Montrer que : } \forall m \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} \, dt \leq \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1}.$$

On encadre la fonction à intégrer sur l'intervalle considéré.

$$\forall t \in [0, x], 0 \leq t \leq x$$

$$\Rightarrow 0 \leq t^2 \leq x^2 \quad \text{croissance de } x \mapsto x^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

$$\Rightarrow 1 - x^2 \leq 1 - t^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{1}{1 - t^2} \leq \frac{1}{1 - x^2} \quad \text{décroissance de } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$\Rightarrow 0 \leq t^m \leq \frac{t^m}{1 - t^2} \leq \frac{t^m}{1 - x^2} \quad \text{avec } t^m \geq 0$$

d'où, en intégrant des fonctions continues, par croissance de l'intégrale et $0 \leq x$:

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^m}{1 - t^2} dt \leq \int_0^x \frac{t^m}{1 - x^2} dt$$

Enfin,

$$\int_0^x \frac{t^m}{1 - x^2} dt = \frac{1}{1 - x^2} \left[\frac{t^{m+1}}{m+1} \right]_0^x = \frac{1}{1 - x^2} \frac{x^{m+1}}{m+1} \leq \frac{1}{m+1} \frac{1}{1 - x^2}$$

ce qui donne l'encadrement recherché.

(b) **En déduire que :** $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x \frac{t^m}{1 - t^2} dt = 0 \right).$

On a $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{(m+1)(1-x^2)} = 0$ donc par théorème des gendarmes sur l'encadrement précédent :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^m}{1 - t^2} dt = 0$$

2. (a) **Pour tout réel t de $[0, 1[$ et pour tout k élément de \mathbb{N}^* , calculer $\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j}$.**

Il s'agit d'une somme géométrique **FINIE** de raison $t^2 \neq 1$, donc :

$$\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j} = \sum_{j=0}^{k-1} (t^2)^j = 1 \cdot \frac{1 - (t^2)^k}{1 - t^2} = \frac{1 - t^{2k}}{1 - t^2}$$

(b) **En déduire que :** $\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1 - t^2} dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1 - t^2} dt.$

$x < 1$ donc pour tout $t \in [0, x]$ on a $t \in [0, 1[$ et on a donc la formule précédente, qu'on peut intégrer sur $[0, x]$ (fonctions continues, bornes dans l'ordre croissant). Avec la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_0^x \sum_{j=0}^{k-1} t^{2j} dt &= \int_0^x \frac{1 - t^{2k}}{1 - t^2} dt \\ \sum_{j=0}^{k-1} \int_0^x t^{2j} dt &= \int_0^x \frac{1}{1 - t^2} dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1 - t^2} dt \\ \sum_{j=0}^{k-1} \left[\frac{t^{2j+1}}{2j+1} \right]_0^x &= \int_0^x \frac{1}{1 - t^2} dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1 - t^2} dt \\ \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} &= \int_0^x \frac{1}{1 - t^2} dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1 - t^2} dt \end{aligned}$$

(c) **Utiliser la question 1 pour montrer que la série de terme général $\frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ converge et exprimer**

$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ **sous forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.**

On dispose des sommes partielles de cette série :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1 - t^2} dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1 - t^2} dt$$

On cherche donc à examiner la limite $k \rightarrow +\infty$: d'après la question 1b, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt = 0$; et donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} \right) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt$$

ce qui montre que la série de terme général $\frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ converge, et que

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt$$

(d) **Conclure que :** $\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt.$

En réinjectant ce dernier résultat dans l'expression de 2b :

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt$$

ce qui donne

$$\int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$$

3. **Par une méthode similaire, montrer qu'on a aussi :** $\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{x^{2j}}{2j} = \int_0^x \frac{t^{2k+1}}{1-t^2} dt.$

Il nous faut cette fois sommer les $\frac{x^{2j}}{2j}$ qu'on écrit comme $\int_0^x t^{2j-1} dt$. (donc on prend les puissances impaires de t).

On reproduit la démarche précédente :

$$\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j+1} = t \sum_{j=0}^{k-1} (t^2)^j = t \frac{1-t^{2k}}{1-t^2} = \frac{t-t^{2k+1}}{1-t^2}$$

donc en intégrant sur $[0, x]$:

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+2}}{2j+2} = \int_0^x \frac{t}{1-t^2} dt - \int_0^x \frac{t^{2k+1}}{1-t^2} dt$$

En faisant tendre $k \rightarrow +\infty$, on obtient avec la limite de la question 1 :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+2}}{2j+2} = \int_0^x \frac{t}{1-t^2} dt$$

(et la convergence de cette série, car la suite des sommes partielles a une limite).

Un changement d'indice donne :

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{x^{2j}}{2j} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+2}}{2j+2} = \int_0^x \frac{t}{1-t^2} dt$$

Enfin :

$$\begin{aligned} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{x^{2j}}{2j} &= \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{x^{2j}}{2j} - \sum_{j=1}^k \frac{x^{2j}}{2j} = \int_0^x \frac{t}{1-t^2} dt - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+2}}{2j+2} \quad (\text{même changement d'indice}) \\ &= \int_0^x \frac{t}{1-t^2} dt - \left(\int_0^x \frac{t}{1-t^2} dt - \int_0^x \frac{t^{2k+1}}{1-t^2} dt \right) \\ &= \int_0^x \frac{t^{2k+1}}{1-t^2} dt. \end{aligned}$$