

Devoir surveillé de rentrée
02/09/2022
Durée : 2h

Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes (x et y sont réels > 0 tel que les quantités qui suivent soient bien définies), $n \in \mathbb{N}$:

1. $4 \times 2^{n+1} - 3 \times 2^{n+2}$
2. $\ln(\ln(e^{x+1})) - \ln(x^2 - 1) + \ln(x + 1)$
3. $\ln\left(\sqrt{e^{4x+4}} \times \left(\frac{1}{e^x}\right)^2\right)$
4. $\frac{\frac{4^n}{3^{2n}}}{\frac{3 \times 2^{2n}}{9^{n+1}}}$
5. $\frac{1}{(x-1)(x+2)} - \frac{1}{x^2-1} + \frac{x}{(x^2-1)(x+2)}$
6. $\exp\left(\ln\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{4}(\ln(x^2) - \ln(3^4))\right)$

Exercice 2

On donne : $\ln(2) \simeq 0,69$.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n^2)$.

1. Établir, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'encadrement $0 \leq u_n \leq 1$.
2. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+ , à valeurs réelles, telle que $f(x) = \ln(1 + x^2) - x$.
 - (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - (b) Dresser le tableau de variation de f .
Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 ; puis au point d'abscisse 1.
 - (c) Donner un aperçu de la courbe représentative de f , tenant compte des résultats précédents.
 - (d) Montrer, à l'aide de l'étude de f , que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
 - (e) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
3.
 - (a) Montrer, pour tout réel $x \geq 0$, l'inégalité : $\ln(1 + x) \leq x$.
 - (b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, établir l'inégalité : $u_{n+1} \leq u_n^2$.
 - (c) En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, l'inégalité : $u_n \leq (\ln(2))^n$.
 - (d) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 3

Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \\ 3x + 3y + 2z = 5 \end{cases}$$

Exercice 4 (algèbre linéaire)

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$. On pose $u = (1, 1, 3)$ et $v = (1, 0, 2)$.

1. Montrer que (u, v) est une famille libre.
2. Montrer que (u, v) est une famille génératrice de F . En déduire que (u, v) est une base de F . Que vaut $\dim(F)$?
3. Est-ce que le vecteur $(-1, 3, 1)$ appartient à F ? Si oui, décomposer ce vecteur dans la base (u, v) .

Exercice 5 (Informatique)

1. Écrire une fonction `plus_grand_element` qui prend en argument une liste L de nombres et renvoie le plus grand élément de L .
2. Expliquer ce que fait la fonction suivante :

```
1 def position_maxi(L):
2     maxi=L[0]
3     indices=[0]
4     for k in range(1, len(L)):
5         if L[k]==maxi:
6             indices.append(k)
7         elif L[k]>maxi:
8             indices=[k]
9             maxi=L[k]
10    return indices
```

Que renvoie `position_maxi([1, 2, 2, 3, 1, 3, 2, 1, 3])` ?