

Devoir surveillé de rentrée
02/09/2022
Durée : 2h

Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes (x et y sont réels > 0 tel que les quantités qui suivent soient bien définies), $n \in \mathbb{N}$:

1.

$$\begin{aligned}4 \times 2^{n+1} - 3 \times 2^{n+2} &= 2^{n+1}(4 - 3 \times 2) \\&= 2^{n+1}(-2) \\&= -2^{n+2}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\ln(\ln(e^{x+1})) - \ln(x^2 - 1) + \ln(x+1) &= \ln(x+1) - \ln((x+1)(x-1)) + \ln(x+1) \\&= \ln(x+1) - \ln(x+1) - \ln(x-1) + \ln(x+1) \\&= \ln(x+1) - \ln(x-1) \\&= \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\ln\left(\sqrt{e^{4x+4}} \times \left(\frac{1}{e^x}\right)^2\right) &= \frac{1}{2} \ln(e^{4x+4}) + 2 \ln\left(\frac{1}{e^x}\right) \\&= \frac{1}{2}(4x+4) - 2 \ln(e^x) \\&= 2x+2 - 2x \\&= 2\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\frac{\frac{4^n}{3^{2n}}}{\frac{3 \times 2^{2n}}{9^{n+1}}} &= \frac{4^n}{3^{2n}} \times \frac{9^{n+1}}{3 \times 2^{2n}} \\&= \frac{(2^2)^n}{3^{2n}} \times \frac{(3^2)^{n+1}}{3 \times 2^{2n}} \\&= \frac{2^{2n} \times 3^{2n+2}}{3^{2n} \times 3 \times 2^{2n}} \\&= 3\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-1)(x+2)} - \frac{1}{x^2-1} + \frac{x}{(x^2-1)(x+2)} &= \frac{x+1}{(x^2-1)(x+2)} - \frac{x+2}{(x^2-1)(x+2)} + \frac{x}{(x^2-1)(x+2)} \\&= \frac{x+1 - (x+2) + x}{(x^2-1)(x+2)} \\&= \frac{x-1}{(x^2-1)(x+2)} \\&= \frac{x-1}{(x-1)(x+1)(x+2)} \\&= \frac{1}{(x+1)(x+2)}\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}\exp\left(\ln\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{4}(\ln(x^2) - \ln(3^4))\right) &= \exp\left(\ln(y) - \ln(\sqrt{x}) + \frac{1}{4}(2\ln(x) - 4\ln(3))\right) \\ &= \exp\left(\ln(y) - \frac{1}{2}\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(x) - \ln(3)\right) \\ &= \exp(\ln(y) - \ln(3)) = \exp\left(\ln\left(\frac{y}{3}\right)\right) = \frac{y}{3}\end{aligned}$$

Exercice 2

On donne : $\ln(2) \simeq 0,69$.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n^2)$.

1. Établir, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'encadrement $0 \leq u_n \leq 1$.

On raisonne par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$. Soit $\mathcal{P}(n)$: « $0 \leq u_n \leq 1$ ».

- Initialisation ; $u_0 = 1$ d'après l'énoncé, donc on a bien $0 \leq u_0 \leq 1$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé : supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors on a $0 \leq u_n \leq 1$; et donc

$$\begin{aligned}0 \leq u_n^2 \leq 1 &\quad \text{par croissance de la fonction carré sur } \mathbb{R}_+ \\ \Rightarrow 1 \leq 1 + u_n^2 \leq 2 \\ \Rightarrow 0 \leq \ln(1 + u_n^2) \leq \ln(2) &\quad \text{par croissance de } \ln \\ \Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq \ln(2) \leq 1 &\quad \text{avec la valeur approchée de } \ln(2)\end{aligned}$$

et on a donc bien la propriété au rang $n + 1$.

- Conclusion : par principe de récurrence, on a bien : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$.

2. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+ , à valeurs réelles, telle que $f(x) = \ln(1 + x^2) - x$.

(a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. C'est une forme indéterminée $\infty - \infty$, mais on voit que x va l'emporter sur le \ln ...

On factorise :

$$f(x) = x \left(\frac{\ln(1 + x^2)}{x} - 1 \right)$$

et d'après les croissances comparées, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + x^2)}{x} = 0$$

et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

(b) Dresser le tableau de variation de f .

Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 ; puis au point d'abscisse 1.

On commence par dériver (f est bien dérivable sur \mathbb{R}_+ comme composée de fonctions dérivables) :

$$\forall x \geq 0, f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2} - 1 = \frac{2x - 1 - x^2}{1 + x^2} = \frac{-(x-1)^2}{1 + x^2}$$

On voit immédiatement que f' est négative sur \mathbb{R}_+ et s'annule en 1 ; d'où le tableau :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-
$f(x)$	0	$\ln(2) - 1$	$-\infty$

avec $f(0) = 0$, $f(1) = \ln(2) - 1$, et la limite précédente.

On connaît l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0 :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

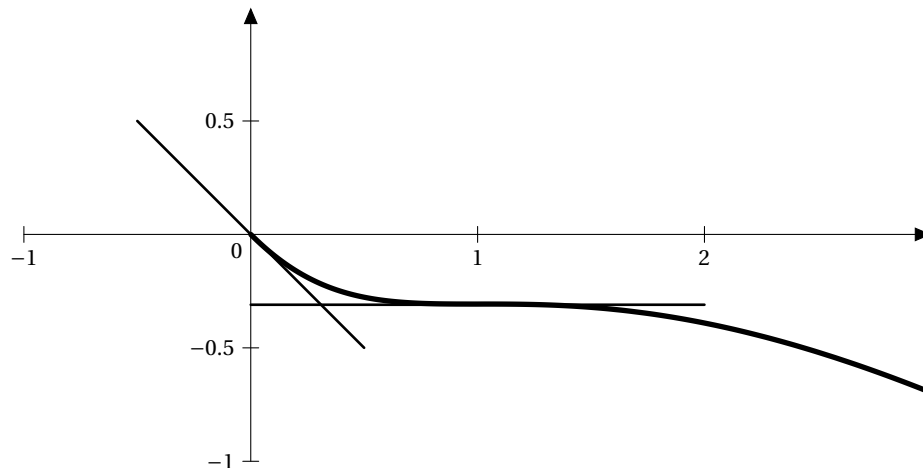
Avec $f'(0) = -1$, et $f(0) = 0$, on a l'équation de la tangente en 0 :

$$y = -x$$

et avec $f'(1) = 0$, et $f(1) = \ln(2) - 1$, on a l'équation de la tangente en 1 :

$$y = \ln(2) - 1 \quad (\text{tangente horizontale})$$

(c) **Donner un aperçu de la courbe représentative de f , tenant compte des résultats précédents.**



(les deux segments de droite représentent les tangentes en 0 et 1).

(d) **Montrer, à l'aide de l'étude de f , que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.**

On étudie, pour tout entier n :

$$u_{n+1} - u_n = \ln(1 + u_n^2) - u_n = f(u_n)$$

On a vu que pour tout n , $u_n \in [0, 1]$; et donc $f(u_n) \leq 0$ d'après l'étude de f .

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leq 0$$

et on en conclut que (u_n) est décroissante.

(e) **Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.**

(u_n) est décroissante d'après la question précédente, et minorée par 0 d'après la question 1 ; donc elle est convergente.

3. (a) **Montrer, pour tout réel $x \geq 0$, l'inégalité : $\ln(1+x) \leq x$.**

Étude de fonction classique : on pose $g(x) = \ln(1+x) - x$ pour tout $x \geq 0$.

On a alors $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}$, et on voit que g' est négative sur \mathbb{R}_+ ; donc g est décroissante sur \mathbb{R}_+ ; et comme $g(0) = \ln(1+0) - 0 = 0$ on en conclut que : $\forall x \geq 0, g(x) \leq 0$; ce qui donne l'inégalité recherchée.

On dispose aussi d'un argument de **concavité** : soit $f : x \mapsto \ln(1+x)$, définie sur \mathbb{R}_+ .

Alors $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ et $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ et on voit que f'' est négative sur \mathbb{R}_+ .

f est donc concave sur \mathbb{R}_+ ; donc elle est en-dessous de ses tangentes, et notamment de sa tangente au point d'abscisse 0.

L'équation de cette dernière tangente est : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$; ce qui se réduit à $y = x$.

On peut donc conclure : $\forall x \geq 0, \ln(1+x) \leq x$.

(b) **Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, établir l'inégalité : $u_{n+1} \leq u_n^2$.**

Comme $u_n^2 \geq 0$, on peut appliquer l'inégalité précédente avec $x = u_n^2$. On a alors

$$u_{n+1} = \ln(1 + u_n^2) \leq u_n^2$$

(c) **En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, l'inégalité : $u_n \leq (\ln(2))^n$.**

C'est une récurrence.

- Pour $n = 1$, il faut montrer $u_1 \leq \ln(2)$. Or

$$u_1 = \ln(1 + u_0^2) = \ln(1 + 1^2) = \ln(2)$$

ce qui donne a fortiori $u_1 \leq \ln(2)$: la propriété est vraie au rang 1.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on suppose que $u_n \leq (\ln(2))^n$.

Alors

$$u_{n+1} \leq u_n^2 \leq ((\ln(2))^n)^2 = (\ln(2))^{2n}$$

Mais comme $0 \leq \ln(2) \leq 1$, et $2n \geq n+1$, on a $(\ln(2))^{2n} \leq (\ln(2))^{n+1}$, et donc on trouve finalement $u_{n+1} \leq (\ln(2))^{n+1}$: d'où l'hérédité.

- Finalement, par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq (\ln(2))^n$.

(d) **Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.**

On a ainsi montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq (\ln(2))^n$$

Comme $\ln(2) \in [0, 1[$ (attention au crochet ouvert en 1 !!), on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln(2))^n = 0$; d'où par théorème des gendarmes avec l'encadrement précédent :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Exercice 3

Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \\ 3x + 3y + 2z = 5 \end{cases}$$

Avec $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ on se ramène au système

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -3y - z = 2 \end{cases}$$

On obtient donc une infinité de solutions qu'il est commode d'exprimer en fonction du paramètre y . L'ensemble des solutions \mathcal{S} est donné par :

$$\mathcal{S} = \{(3 + y, y, -2 - 3y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 4 (algèbre linéaire)

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$. On pose $u = (1, 1, 3)$ et $v = (1, 0, 2)$.

1. **Montrer que (u, v) est une famille libre.**

Ce sont deux vecteurs non colinéaires de \mathbb{R}^3 .

2. **Montrer que (u, v) est une famille génératrice de F . En déduire que (u, v) est une base de F . Que vaut $\dim(F)$?**

Il s'agit de se demander si pour tout vecteur x de F , il existe deux réels λ et μ tels que $x = \lambda u + \mu v$.

Soit $x = (a, b, c)$ un vecteur de F (on a donc $2a + b - c = 0$).

On écrit : $\lambda u + \mu v = (a, b, c) \Leftrightarrow (\lambda + \mu, \lambda, 3\lambda + 2\mu) = (a, b, c) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = a \\ \lambda = b \\ 3\lambda + 2\mu = c \end{cases}$.

On effectue un pivot avec : $(L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1)$ pour la première équivalence puis $(L_3 \leftarrow L_3 - L_2)$ pour la seconde.

$$\begin{cases} \lambda + \mu = a \\ \lambda = b \\ 3\lambda + 2\mu = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = a \\ -\mu = b - a \\ -\mu = c - 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = a \\ -\mu = b - a \\ 0 = -2a - b + c \end{cases}$$

La dernière équation est automatiquement vérifiée car $(a, b, c) \in F$ (ouf !) et on trouve $\lambda = b$ et $\mu = a - b$.

On peut donc conclure que (u, v) est génératrice de F .

Étant aussi une famille libre, (u, v) est finalement une base de F .

Cette base est de cardinal 2 : on en conclut que $\dim(F) = 2$.

3. Est-ce que le vecteur $(-1, 3, 1)$ appartient à F ? Si oui, décomposer ce vecteur dans la base (u, v) .

Il suffit de voir si ce vecteur vérifie la condition d'appartenance à F : $2x + y - z = 0$.

Ici : $2 \times (-1) + 3 - 1 = 0$: $(-1, 3, 1) \in F$.

D'après les calculs précédents on a vu que pour un vecteur (a, b, c) de F :

$$(a, b, c) = b(1, 1, 3) + (a - b)(1, 0, 2)$$

d'où dans le cas qui nous occupe, la décomposition recherchée :

$$(-1, 3, 1) = 3(1, 1, 3) + (-4)(1, 0, 2)$$

Exercice 5 (Informatique)

1. Écrire une fonction `plus_grand_element` qui prend en argument une liste `L` de nombres et renvoie le plus grand élément de `L`.

Algorithme de recherche de max classique (pour une liste non vide, ce qu'on supposera ici) : le max « temporaire » est le premier élément de la liste (ligne 2) ; on parcourt la liste à l'aide d'une boucle `for` (ligne 3), et dès qu'une composante est plus grande que le max « temporaire » (ligne 4), elle devient le nouveau max (ligne 5).

À la fin du parcours on est sûr d'avoir trouvé le max.

```
1 def plus_grand_element(L):
2     maxi = L[0]
3     for k in range(1, len(L)):
4         if L[k] > maxi:
5             maxi = L[k]
6     return maxi
```

2. Expliquer ce que fait la fonction suivante :

```
1 def position_maxi(L):
2     maxi = L[0]
3     indices = [0]
4     for k in range(1, len(L)):
5         if L[k] == maxi:
6             indices.append(k)
7         elif L[k] > maxi:
8             indices = [k]
9             maxi = L[k]
10    return indices
```

C'est une variation de la fonction précédente. La variable `maxi` évolue comme le max temporaire de la fonction précédente ; la liste `indices` fonctionne de la manière suivante :

- au début, le max temporaire est la composante d'indice 0 et `indices` vaut `[0]` ;

- si en cours de route, on rencontre une composante strictement supérieure à notre max temporaire, alors sa valeur est stockée dans `maxi` et la liste `indices` est redéfinie comme contenant *comme seul élément* l'indice de cette composante ;
- si en cours de route, on rencontre une composante égale à notre max temporaire, alors la variable `maxi` n'est pas modifiée et on *ajoute* à la liste `indices` l'indice de cette « nouvelle apparition » du max.

Au final, la liste `indices` contient les indices auxquels apparaît la valeur maximale de la liste.

Que renvoie `position_maxi([1, 2, 2, 3, 1, 3, 2, 1, 3])` ?

Ici la valeur maximale est 3, qui apparaît aux indices 3,5,8 (les indices commencent à 0 !!). Le résultat renvoyé est `[3,5,8]`.