

Devoir surveillé n°1

24/09/2022

Durée : 4h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1 (applications du cours)

1. Déterminer si les ensembles suivants sont des espaces vectoriels.

- $F_1 = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid M^2 = 4I_3\}$
- $F_2 = \{P \in \mathbb{R}_3(x) \mid P(0) = 0\}$

2. Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à M .

- (a) Déterminer $\text{Ker}(f)$; en déduire le rang de f .
- (b) Montrer que $\mathcal{B} = \{(-1, 0, 1), (2, 0, -1), (1, 1, 1)\}$ est une base de \mathbb{R}^3 . Donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 2

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre trois à éléments réels, I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\mathbf{0}$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On considère, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, les ensembles $E_1(A)$ et $E_2(A)$ suivants :

$$\begin{aligned} E_1(A) &= \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = M\} \\ E_2(A) &= \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid A^2M = AM\} \end{aligned}$$

Partie I

1. Montrer que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On admettra que $E_2(A)$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. (a) Établir : $E_1(A) \subset E_2(A)$.
- (b) Montrer que, si A est inversible, alors $E_1(A) = E_2(A)$.
3. (a) Établir que, si $A - I_3$ est inversible, alors $E_1(A) = \{\mathbf{0}\}$.

- (b) Un exemple : Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_1(B)$ et $E_2(B)$.

Partie II

On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $D = P^{-1}CP$.
(On remarque qu'on a donc $C = PDP^{-1}$).
5. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}M$.
Montrer : $M \in E_1(C) \Leftrightarrow N \in E_1(D)$.
6. Montrer que $N \in E_1(D)$ si et seulement s'il existe trois réels a, b, c tels que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
7. En déduire l'expression générale des matrices de $E_1(C)$ et déterminer une base et la dimension de $E_1(C)$.

Exercice 3

Un endomorphisme de l'espace vectoriel des matrices symétriques d'ordre 2

On note :

- $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2.
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- S_2 l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2 (on rappelle qu'une matrice M est symétrique ssi ${}^tM = M$).

- Calculer les produits AFA , AGA , AHA .
- Montrer que S_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que (F, G, H) est une base de S_2 . Déterminer la dimension de S_2 .

On note u l'application qui à chaque matrice S de S_2 , associe la matrice $u(S) = ASA$.

- Montrer : $\forall S \in S_2, u(S) \in S_2$.
 - Montrer que u est un endomorphisme de l'espace vectoriel S_2 .
 - Donner la matrice de u dans la base (F, G, H) de S_2 . On note M cette matrice.
- Calculer $u\left(\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right)$ (on pourra utiliser la matrice M).
- On admet que la famille $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right\}$ forme une base de S .
Calculer la matrice de u dans cette base (il faut trouver une matrice diagonale).

Exercice 4

Soit m un réel fixé strictement positif, et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}$$

On note $\mathbf{0}$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et Id l'endomorphisme identité de \mathbb{R}^3 .
Pour tout endomorphisme g de \mathbb{R}^3 , on pose $g^0 = \text{Id}$ et, pour tout k de \mathbb{N}^* , $g^k = g \circ g^{k-1}$.

1. Déterminer le noyau $\text{Ker}(f)$ de l'endomorphisme f . f est-il injectif ? bijectif ? Déterminer l'image de l'endomorphisme f .
2. La matrice M est-elle inversible ?
3. Montrer que la matrice M^2 est une combinaison linéaire de I_3 et de M .
4. En déduire que $M^{-1} = \frac{1}{2}(M - I_3)$.
5. On admet que les vecteurs suivants forment une base de \mathbb{R}^3 , que l'on note \mathcal{B} :

$$u = (1, -m, 0) \quad v = (0, 1, -m) \quad w = (1, m, m^2)$$

Donner $\text{Mat}(f, \mathcal{B})$.

6. On note : $p = \frac{1}{3}(f + \text{Id})$ et $q = -\frac{1}{3}(f - 2\text{Id})$.

Montrer les propriétés :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, p^n = p$ et $q^n = q$.
- $p \circ q = q \circ p = \tilde{0}$ (où $\tilde{0}$ désigne l'endomorphisme nul de \mathbb{R}^3).

Indication : on pourra utiliser les matrices de p et q dans la base \mathcal{B} .

7. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, f^n = (-1)^n q + 2^n p$.