

Devoir surveillé n°1 Corrigé

Exercice 1 (applications du cours)

1. Déterminer si les ensembles suivants sont des espaces vectoriels.

- $F_1 = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid M^2 = 4I_3\}$

La matrice nulle n'appartient pas à cet ensemble : ce n'est pas un espace vectoriel/

- $F_2 = \{P \in \mathbb{R}_3(x) \mid P(0) = 0\}$

Oui (vu en TD).

2. Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à M .

(a) Déterminer $\text{Ker}(f)$; en déduire le rang de f .

Comme M est la matrice de f dans la base canonique de \mathbb{R}^3 , on a :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f((x, y, z)) = (3x - 8y + 5z, x - 2y + z, y - z)$$

Ainsi :

$$(x, y, z) \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 8y + 5z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z$$

par une résolution sans souci particulier.

Donc $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((1, 1, 1))$.

La famille constituée du seul vecteur $(1, 1, 1)$ est génératrice de $\text{Ker}(f)$, et libre car constituée d'un vecteur non nul ; c'est donc une base de $\text{Ker}(f)$ et on peut conclure $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$.

Le théorème du rang appliqué à $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ donne : $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f)$; et donc $\text{rg}(f) = 2$.

(b) Montrer que $\mathcal{B} = \{(-1, 0, 1), (2, 0, -1), (1, 1, 1)\}$ est une base de \mathbb{R}^3 . Donner la matrice de f dans cette base.

Soient $u = (-1, 0, 1)$, $v = (2, 0, -1)$, $w = (1, 1, 1)$. On trouve

- $f(u) = (2, 0, -1) = v$
- $f(v) = (1, 1, 1) = w$
- $f(w) = (0, 0, 0)$ ($w \in \text{Ker}(f)$!)

d'où

$$\text{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (d'après EML 2004)

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre trois à éléments réels, I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, 0 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On considère, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, les ensembles $E_1(A)$ et $E_2(A)$ suivants :

$$\begin{aligned} E_1(A) &= \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = M\} \\ E_2(A) &= \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid A^2M = AM\} \end{aligned}$$

Partie I

1. **Montrer que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.**

On admettra que $E_2(A)$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- Si $M = 0$ on a clairement $AM = 0 = M$; donc la matrice nulle appartient à E_1 qui est donc non vide.
- $\forall (M, N) \in E_1(A)^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda M + N$ car $AM = M$ et $AN = N$; donc $\lambda M + N \in E_1(A)$.
- Conclusion : $E_1(A)$ est bien un sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On admettra que $E_2(A)$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. **Établir : $E_1(A) \subset E_2(A)$.**

Soit $M \in E_1(A)$: on a donc $AM = M$.

On a alors $A^2M = A \times AM = A \times M$, donc $M \in E_2(A)$.

On a donc bien $E_1(A) \subset E_2(A)$.

Montrer que, si A est inversible, alors $E_1(A) = E_2(A)$.

On a déjà $E_1(A) \subset E_2(A)$ par la question précédente.

Si A est inversible, montrons $E_2(A) \subset E_1(A)$.

Soit $M \in E_2(A)$: on a $A^2M = AM$; et en multipliant par A^{-1} on obtient $A^{-1}A^2M = A^{-1}AM$ donc $AM = M$: donc $M \in E_1(A)$.

Si A est inversible, on a donc $E_1(A) = E_2(A)$.

(3) (a) **Établir que, si $A - I_3$ est inversible, alors $E_1(A) = \{0\}$.**

Supposons $A - I$ inversible.

On a :

$$M \in E_1(A) \Leftrightarrow AM = M \Leftrightarrow (A - I)M = 0$$

On peut alors multiplier par $(A - I)^{-1}$ (préserve l'équivalence, c'est une matrice inversible) :

$$M \in E_1(A) \Leftrightarrow (A - I)^{-1}(A - I)M = 0 \Leftrightarrow M = 0$$

et on a donc bien $E_1(A) = \{0\}$.

(b) **Un exemple : Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_1(B)$ et $E_2(B)$.**

On utilise les questions précédentes !

- $B - I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible car triangulaire, sans zéro sur la diagonale, donc $E_1(B) = \{0\}$ (question 3a).

- De plus B est inversible (même critère) donc $E_2(A) = E_2(B) = \{0\}$ (question 2a).

Partie II

On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

4. **Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $D = P^{-1}CP$.**

(On remarque qu'on a donc $C = PDP^{-1}$).

Il suffit de vérifier que $P \times \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = I_3$, ce qui ne pose pas de problème.

Un calcul direct fournit ensuite $P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$.

5. **Soit** $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. **On note** $N = P^{-1}M$.

Montrer : $M \in E_1(C) \Leftrightarrow N \in E_1(D)$.

On écrit

$$\begin{aligned} M \in E_1(C) &\Leftrightarrow CM = M \Leftrightarrow PDP^{-1}M = M \\ &\Leftrightarrow P^{-1}PDP^{-1}M = P^{-1}M \text{ (en multipliant par } P^{-1} \text{ inversible)} \\ &\Leftrightarrow DP^{-1}M = P^{-1}M \\ &\Leftrightarrow P^{-1}M \in E_1(D) \\ &\Leftrightarrow N \in E_1(D) \end{aligned}$$

6. **Montrer que** $N \in E_1(D)$ **si et seulement s'il existe trois réels** a, b, c **tels que** $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Il faut cette fois introduire les coefficients de N : notons $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On trouve alors $DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}$

et on a $DN = N$ ssi

$$\begin{cases} a = b = c = 0 \\ 2g = g \\ 2h = h \\ 2i = i \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = g = h = i = 0 \Leftrightarrow N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $N \in E_1(D)$ si et seulement s'il existe trois réels a, b, c tels que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(en ayant renommé d, e, f en a, b, c, \dots)

7. **En déduire l'expression générale des matrices de** $E_1(C)$ **et déterminer une base et la dimension de** $E_1(C)$.

D'après la question 5,

$$M \in E_1(C) \Leftrightarrow P^{-1}M \in E_1(D) \Leftrightarrow P^{-1}M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow M = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ((} a, b, c \text{) réels)}$$

avec l'expression de P trouvée en question ??.

Donc

$$E_1(C) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

On vérifie facilement que les trois matrices composant cette famille génératrice de $E_1(C)$ forment une famille libre ; on a ainsi une base de $E_1(C)$ qui est donc de dimension 3.

Exercice 3 (d'après EML 2010)

Un endomorphisme de l'espace vectoriel des matrices symétriques d'ordre 2

On note :

- $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2.
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- S_2 l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2 (on rappelle qu'une matrice M est symétrique ssi ${}^tM = M$).

1. Calculer les produits AFA , AGA , AHA .

On trouve

$$AFA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad AGA = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}, \quad AHA = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

2. Montrer que S_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que (F, G, H) est une base de S_2 . Déterminer la dimension de S_2 .

$$\text{On a } \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in S_2 \Leftrightarrow y = z; \text{ d'où } S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \text{Vect}(F, G, H)$$

Il reste donc à montrer la liberté de la famille (F, G, H) : si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont tels que $\lambda_1 F + \lambda_2 G + \lambda_3 H = 0$ (matrice nulle), alors $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui montre que les λ_i sont tous nuls. Ainsi la famille est libre ; c'est une base de S_2 , qui est donc de dimension 3.

On note u l'application qui à chaque matrice S de S_2 , associe la matrice $u(S) = ASA$.

3. (a) Montrer : $\forall S \in S_2, u(S) \in S_2$.

Soit $S \in S_2$. On calcule ${}^t(u(S)) = {}^t(ASA) = {}^tA {}^tS {}^tA = ASA$ car $(A, S) \in S_2^2$. Donc $u(S) \in S_2$.

(b) Montrer que u est un endomorphisme de l'espace vectoriel S_2 .

u est à valeurs dans S_2 d'après la question précédente ; il suffit de montrer qu'elle est linéaire.

Soient donc $(M, N) \in S_2^2, \lambda \in \mathbb{R}$: on a $u(\lambda M + N) = A(\lambda M + N)A = \lambda AMA + ANA = \lambda u(M) + u(N)$ ce qui donne la linéarité.

(c) Donner la matrice de u dans la base (F, G, H) de S_2 .

La question 1 donne $u(F) = 4H$, $u(G) = 4G + 12H$, $u(H) = 4F + 6G + 9H$. On obtient donc la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

4. Calculer $u\left(\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right)$ (on pourra utiliser la matrice M).

Les coordonnées de $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 4F - 2G + H$ dans la base (F, G, H) sont la colonne $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On calcule donc $M \times \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; de sorte que $u(4F - 2G + H) = 4F - 2G + H = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

5. On admet que la famille $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right\}$ forme une base de S .

Calculer la matrice de u dans cette base (il faut trouver une matrice diagonale).

Les colonnes de coordonnées respectives des deux autres matrices sont $\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On a $M \times \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ -16 \end{pmatrix}$ et donc :

$$u\left(\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & -16 \end{pmatrix} = -4 \times \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

et $M \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 32 \\ 64 \end{pmatrix}$ et donc :

$$u\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 16 & 32 \\ 32 & 64 \end{pmatrix} = 16 \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Finalement

$$\text{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 (d'après HEC 2012)

Soit m un réel fixé strictement positif, et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}$$

On note 0 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et Id l'endomorphisme identité de \mathbb{R}^3 . Pour tout endomorphisme g de \mathbb{R}^3 , on pose $g^0 = \text{Id}$ et, pour tout k de \mathbb{N}^* , $g^k = g \circ g^{k-1}$.

1. Déterminer le noyau $\text{Ker}(f)$ de l'endomorphisme f . f est-il injectif ? bijectif ? Déterminer l'image de l'endomorphisme f .

On peut expliciter $f((x, y, z))$ à partir de la matrice M ; ou directement chercher les colonnes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ telles

$$\text{que } M \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Avec cette dernière stratégie :

$$M \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{m} + \frac{z}{m^2} = 0 \\ mx + \frac{z}{m} = 0 \\ m^2 + my = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} my + z = 0 \\ m^2x + z = 0 \\ m^2x + my = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} my + z = 0 \\ m^2x + z = 0 \\ my - z = 0 \end{cases}$$

ce qui donne directement $my = z = 0$ donc $y = 0$ car m est non nul, et par suite $x = 0$.

Ainsi $\text{Ker } M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ et en repassant aux vecteurs

$$\text{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

f est donc injectif d'après le cours ; comme c'est un endomorphisme injectif, il est bijectif ; et par suite il est surjectif et donc $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.

2. **La matrice M est-elle inversible ?**

M est la matrice de l'automorphisme f ; donc M est inversible.

3. **Montrer que la matrice M^2 est une combinaison linéaire de I_3 et de M.**

Un calcul direct fournit :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 2 & 1/m \\ m^2 & m & 2 \end{pmatrix} = 2I_3 + M$$

4. **En déduire que $M^{-1} = \frac{1}{2}(M - I_3)$.**

$M^2 = 2I_3 + M$ s'écrit aussi $2I_3 = M^2 - M$ ou encore $\frac{1}{2}(M - I_3)M = I_3$, ce qui montre que $M^{-1} = \frac{1}{2}(M - I_3)$.

5. **On admet que les vecteurs suivants forment une base de \mathbb{R}^3 , que l'on note \mathcal{B} :**

$$u = (1, -m, 0) \quad v = (0, 1, -m) \quad w = (1, m, m^2)$$

Donner $\text{Mat}(f, \mathcal{B})$.

On trouve (en multipliant M par la colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ -m \\ 0 \end{pmatrix}$, ou avec l'expression de $f((x, y, z))$) :

$$f(u) = (-1, m, 0) = -u$$

et de manière similaire

$$f(v) = -v, \quad f(w) = 2w$$

Par la construction usuelle

$$\text{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dans ce qui suit on notera $N = \text{Mat}(f, \mathcal{B})$.

6. **On note : $p = \frac{1}{3}(f + \text{Id})$ et $q = -\frac{1}{3}(f - 2\text{Id})$.**

Montrer les propriétés :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, p^n = p$ et $q^n = q$.
- $p \circ q = q \circ p = \tilde{0}$ (où $\tilde{0}$ désigne l'endomorphisme nul de \mathbb{R}^3).

Indication : on pourra utiliser les matrices de p et q dans la base \mathcal{B} .

Introduisons donc $P = \text{Mat}(p, \mathcal{B})$ et $Q = \text{Mat}(q, \mathcal{B})$.

De $p = \frac{1}{3}(f + \text{Id})$, on tire

$$P = \frac{1}{3}(N + I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et avec $q = -\frac{1}{3}(f - 2\text{Id})$:

$$Q = -\frac{1}{3}(N - 2I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour mettre une matrice *diagonale* à la puissance n il suffit de mettre ses coefficients diagonaux à la puissance n ; donc

$$P^n = \begin{pmatrix} 0^n & 0 & 0 \\ 0 & 0^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P$$

et

$$Q^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 0^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Q$$

On vérifie enfin que $PQ = QP = \mathbf{0}$, ce qui donne $p \circ q = q \circ p = \tilde{0}$.

7. **Montrer :** $\forall n \in \mathbb{N}, f^n = (-1)^n q + 2^n p$.

On peut encore passer par les matrices dans \mathcal{B} .

$$\text{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = N \text{ est diagonale, donc}$$

$$\text{Mat}(f^n, \mathcal{B}) = N^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = (-1)^n Q + 2^n P = \text{Mat}((-1)^n q + 2^n p, \mathcal{B})$$

ce qui donne bien $f^n = (-1)^n q + 2^n p$.

On peut aussi procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

- au rang 0 on a $f^0 = \text{Id}$ et $(-1)^0 q + 2^0 p = q + p = \text{Id}$ car $Q + P = I_3$.
- si $f^n = (-1)^n q + 2^n p$, il faut calculer $f^{n+1} = f^n \circ f$.
On observe alors que $f + \text{Id} = 3p$ et $f - 2\text{Id} = -3q$ ce qui donne par un petit système $f = 2p - q$ (NB : ceci se retrouve par les matrices : $N = 2P - Q$).

Alors

$$\begin{aligned} f^{n+1} &= f^n \circ f = ((-1)^n q + 2^n p) \circ (2p - q) = 2 \times (-1)^n \underbrace{q \circ p}_{\tilde{0}} - (-1)^n \underbrace{q \circ q}_q + 2^{n+1} \underbrace{p \circ p}_p - 2^n \underbrace{p \circ q}_{\tilde{0}} \\ f^{n+1} &= (-1)^{n+1} q + 2^{n+1} p \end{aligned}$$

ce qui donne l'hérédité et permet de conclure.