

## Devoir surveillé n°2

22/10/2022

Durée : 4h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document. **Utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

### Exercice 1 (une suite implicite)

Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $h_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$\forall x > 0, h_n(x) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}$$

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $h_n$  est strictement décroissante sur  $]0, 1[$ , et strictement croissante sur  $[1, +\infty[$ .
2. En déduire que pour tout entier  $n$  non nul, l'équation  $h_n(x) = 4$  admet exactement deux solutions, notées  $u_n$  et  $v_n$ , vérifiant  $0 < u_n < 1 < v_n$ .

3. (a) Montrer que :

$$\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1} - 1)}{x^{n+1}}$$

- (b) En déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, h_{n+1}(v_n) \geq 4$ .
- (c) Montrer que la suite  $(v_n)$  est décroissante.
- (d) Montrer de même que la suite  $(u_n)$  est croissante.
4. (a) Montrer que la suite  $(v_n)$  converge vers un réel  $\ell$ , et montrer que  $\ell \geq 1$ .
- (b) En supposant que  $\ell > 1$ , démontrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n)^n = +\infty$ . En déduire une contradiction.
- (c) Déterminer la limite de  $(v_n)$ .
5. (a) Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, (v_n)^n = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ .
- (b) Retrouver à l'aide de la question précédente la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .

### Exercice 2 (une suite récurrente)

On donne :  $0.69 < \ln 2 < 0.70$ . On considère l'application :

$$\begin{aligned} g: ]0, +\infty[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 + \ln(x) \end{aligned}$$

1. Montrer que  $g$  est continue et strictement croissante sur  $]0, +\infty[$  et déterminer les limites de  $g$  en 0 et en  $+\infty$ .
2. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$ , d'inconnue  $x \in ]0, +\infty[$ , admet une solution et une seule. On note  $\alpha$  l'unique solution de cette équation.
3. Montrer:  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ .

On note  $I = \left[ \frac{1}{2}, 1 \right]$ , et on considère l'application :

$$\begin{aligned} f: I &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\ln(x) \end{aligned}$$

4. (a) Montrer que  $f$  est strictement croissante sur  $I$ . On rappelle que  $\sqrt{2} \approx 1.4$ .  
 (b) Montrer :  $\frac{1}{2} < f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1) < 1$ .  
 (c) En déduire :  $\forall x \in I, f(x) \in I$ .
5. On considère la suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 1$ , et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .  
 (a) Calculer  $u_1$ .  
 (b) Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$ .  
 (c) Montrer par récurrence que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.  
 (d) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et que sa limite est le réel  $\alpha$ .

### Exercice 3 (Probabilités)

Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est  $p$  et la proportion de boules noires est  $q$ .  
 Ainsi, on a :  $(p, q) \in ]0, 1[^2$ , et  $p + q = 1$ . De plus,  $p$  est la probabilité de tirer une boule blanche dans cette urne, et  $q$  celle de tirer une noire.

#### Partie I : Tirages avec arrêt dès qu'une boule noire a été obtenue

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire.

On note  $T$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et  $U$  la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Reconnaître la loi de  $T$ . Pour tout entier  $k \geq 1$ , donner  $P(T = k)$  et rappeler l'espérance et la variance de  $T$ .
2. En déduire que  $U$  admet une espérance ; calculer  $E(U)$ .

#### Partie II : Tirages avec arrêt dès qu'une boule blanche et une boule noire ont été obtenues

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule blanche et au moins une boule noire.

On note :

- $X$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
- $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
- $Z$  la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.

Pour tout entier naturel non nul  $i$ , on note :

- $B_i$  l'événement « la  $i$ -ème boule tirée est blanche » ,
- $N_i$  l'événement « la  $i$ -ème boule tirée est noire » .

Dans les questions qui suivent, on prendra soin de formuler les événements considérés à l'aide des événements  $B_i$  et  $N_i$ .

3. (a) Déterminer  $X(\Omega)$ .  
 (b) Montrer, pour tout entier  $k \geq 2$  :  $P(X = k) = q p^{k-1} + p q^{k-1}$ .

(c) Vérifier :  $\sum_{k=2}^{+\infty} P(X = k) = 1$ .

(d) Montrer que la variable aléatoire  $X$  admet une espérance et que :  $E(X) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ .

4. (a) Pour tout entier  $k \geq 2$ , déterminer  $P((X = k) \cap (Y = 1))$  (on distinguera les cas  $k = 2$  et  $k \geq 3$ ).

(b) En déduire :  $P(Y = 1) = q(1 + p)$ .

On pourra utiliser le système complet d'événements associé à la variable  $X$ .

(c) Déterminer la loi de la variable aléatoire  $Y$ .

On admet que l'espérance de  $Y$  existe et que :  $E(Y) = \frac{1}{q}(1 - p + p^2)$ .

5. Donner la loi de  $Z$  et son espérance.

6. Montrer que les variables aléatoires  $YZ$  et  $X - 1$  sont égales.

## Exercice 4 (Équivalent de Stirling)

1. On définit la fonction  $f$  par :

$$f(x) = \left(1 + \frac{x}{2}\right) \ln(1+x) - x$$

(a) Quel est l'ensemble de définition de  $f$  ? Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur cet ensemble de définition, que l'on notera  $\mathcal{D}_f$ .

(b) Calculer  $f'(x)$  ; montrer :  $\forall x \in \mathcal{D}_f, f''(x) = \frac{x}{2(1+x)^2}$ .

Déterminer le signe de  $f'$ , les variations de  $f$  et le signe de  $f$  sur  $\mathcal{D}_f$ .

(c) Montrer :  $\forall x \in \mathbb{R}^+, f''(x) \leq \frac{x}{2}$ .

(d) En déduire :  $\forall x \in \mathbb{R}^+, 0 \leq f(x) \leq \frac{x^3}{12}$ .

2. On définit dans cette question la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \ln \left( \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}} \right)$$

(a) En calculant soigneusement  $u_n - u_{n+1}$ , démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n - u_{n+1} = nf\left(\frac{1}{n}\right)$$

(b) En déduire que la série  $\sum (u_n - u_{n+1})$  est convergente.

(c) Quelle est la nature de la suite  $(u_n)$  ?

(d) En déduire qu'il existe une constante  $C > 0$  (qu'on ne cherchera pas à calculer) telle que :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C \frac{n^n}{e^n} \sqrt{n}$$