

## Devoir surveillé n°2 Corrigé

### Exercice 1 (une suite implicite)

Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $h_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$\forall x > 0, h_n(x) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}$$

1. **Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $h_n$  est strictement décroissante sur  $]0, 1[$ , et strictement croissante sur  $]1, +\infty[$ .**

On passe par sa dérivée.  $h_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  comme composée de telles fonctions (le dénominateur ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}_+^*$ ).

En écrivant  $h_n(x) = x^n + 1 + x^{-n}$  il vient :

$$\forall x > 0, h'_n(x) = nx^{n-1} + (-n)x^{-n-1} = n \frac{x^{2n} - 1}{x^{n+1}}$$

$n$  et  $x^{n+1}$  sont strictement positifs donc le signe de  $h'_n$  est celui de  $x^{2n} - 1$ .

On a donc :  $\forall x \in ]0, 1[, h'_n(x) < 0$  ; et  $\forall x \in ]1, +\infty[, h'_n(x) > 0$ .

La fonction  $h_n$  est donc strictement décroissante sur  $]0, 1[$ , et strictement croissante sur  $]1, +\infty[$ .

2. **En déduire que pour tout entier  $n$  non nul, l'équation  $h_n(x) = 4$  admet exactement deux solutions, notées  $u_n$  et  $v_n$ , vérifiant  $0 < u_n < 1 < v_n$ .**

On peut dresser un tableau de variations de  $h_n$  (les limites sont évidentes) :

| $x$      | 0         | 1 | $+\infty$ |
|----------|-----------|---|-----------|
| $h_n(x)$ | $+\infty$ | 3 | $+\infty$ |

En appliquant le théorème de la bijection sur  $]0, 1[$  :

$h_n$  est continue, strictement décroissante sur  $]0, 1[$ , donc réalise une bijection de  $]0, 1[$  sur  $]3, +\infty[$ .  $4 \in ]3, +\infty[$ , donc il existe un unique réel de  $]0, 1[$ , qu'on note  $u_n$ , tel que  $h_n(u_n) = 4$ .

De même sur  $]1, +\infty[$  :

$h_n$  est continue, strictement croissante sur  $]1, +\infty[$ , donc réalise une bijection de  $]1, +\infty[$  sur  $]3, +\infty[$ .  $4 \in ]3, +\infty[$ , donc il existe un unique réel de  $]1, +\infty[$ , qu'on note  $v_n$ , tel que  $h_n(v_n) = 4$ .

Comme  $h_n(1) = 3 \neq 4$  on n'a bien que deux solutions à l'équation  $h_n(x) = 4$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

De plus  $u_n \in ]0, 1[$  et  $v_n > 1$  d'après la construction ci-dessus : on a bien  $0 < u_n < 1 < v_n$ .

3. (a) **Montrer que :**

$$\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1} - 1)}{x^{n+1}}$$

On travaille sur l'expression de gauche :

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, h_{n+1}(x) - h_n(x) &= x^{n+1} + 1 + \frac{1}{x^{n+1}} - \left( x^n + 1 + \frac{1}{x^n} \right) \\ &= \frac{x^{2n+2} + x^{n+1} + 1 - (x^{2n+1} + x^{n+1} + x)}{x^{n+1}} \\ &= \frac{x^{2n+2} + 1 - x^{2n+1} - x}{x^{n+1}} \end{aligned}$$

et en observant par ailleurs :

$$\frac{(x-1)(x^{2n+1}-1)}{x^{n+1}} = \frac{x^{2n+2}-x-x^{2n+1}+1}{x^{n+1}}$$

on a bien l'égalité demandée.

(b) **En déduire :**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, h_{n+1}(v_n) \geq 4$ .

On pose  $x = v_n$  (qui est bien  $> 0$ ) dans l'égalité de 3a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, h_{n+1}(v_n) - h_n(v_n) = \frac{(v_n - 1)(v_n^{2n+1} - 1)}{v_n^{n+1}}$$

Comme  $v_n > 1$ , on a  $v_n - 1 > 0$  et  $v_n^{2n+1} - 1 > 0$ , et l'expression précédente montre que  $h_{n+1}(v_n) - h_n(v_n) > 0$  ; de plus, par définition,  $h_n(v_n) = 4$ . On a donc obtenu  $h_{n+1}(v_n) - 4 > 0$ , ce qui implique  $h_{n+1}(v_n) \geq 4$ .

(c) **Montrer que la suite  $(v_n)$  est décroissante.**

Méthode connue : on utilise la monotonie de  $h_n$ ... ici, en fait de  $h_{n+1}$ .

On écrit  $4 = h_{n+1}(v_{n+1})$  (toujours par définition de  $v_{n+1}$ ) ; donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, h_{n+1}(v_n) \geq h_{n+1}(v_{n+1})$$

Par stricte croissance de  $h_{n+1}$  sur  $]1, +\infty[$  on en déduit  $v_n \geq v_{n+1}$  : la suite  $(v_n)$  est décroissante.

(d) **Montrer de même que la suite  $(u_n)$  est croissante.**

On pose cette fois  $x = u_n$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, h_{n+1}(u_n) - h_n(u_n) = \frac{(u_n - 1)(u_n^{2n+1} - 1)}{u_n^{n+1}}$$

Avec  $0 < u_n < 1$  on voit que cette dernière quantité est positive ; ceci montre de même que  $h_{n+1}(u_n) \geq 4$  ; puis que  $h_{n+1}(u_n) \geq h_{n+1}(u_{n+1})$ .

Or  $h_n$  est strictement décroissante sur  $]0, 1[$  (intervalle auquel appartiennent  $u_n$  et  $u_{n+1}$ ) ; ce qui donne

$$h_{n+1}(u_n) \geq h_{n+1}(u_{n+1}) \Rightarrow u_n \leq u_{n+1}$$

et la suite  $(u_n)$  est donc croissante.

4. (a) **Montrer que la suite  $(v_n)$  converge vers un réel  $\ell$ , et montrer que  $\ell \geq 1$ .**

$(v_n)$  est décroissante et minorée par 1, donc converge vers une limite réelle  $\ell \geq 1$  par théorème de limite monotone.

(b) **En supposant que  $\ell > 1$ , démontrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n)^n = +\infty$ . En déduire une contradiction.**

Par décroissance de  $(v_n)$  on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq \ell > 1$ , donc  $v_n^n \geq \ell^n$ . Or si  $\ell > 1$ ,  $\ell^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  donc par minoration  $v_n^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

Or on sait, par définition de  $v_n$ , que  $h_n(v_n) = 4$  ce qui s'écrit encore  $v_n^n + 1 + \frac{1}{v_n^n} = 4$ . Si  $v_n^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ ,

$v_n^n + 1 + \frac{1}{v_n^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  par opérations usuelles sur les limites : c'est absurde car cette quantité vaut 4.

(c) **Déterminer la limite de  $(v_n)$ .**

On a  $\ell \geq 1$  et on vient de voir que  $\ell > 1$  amène une contradiction : donc  $\ell = 1$ .

5. (a) **Montrer :**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, (v_n)^n = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ .

Par définition de  $v_n$ , on a  $v_n^n + 1 + \frac{1}{v_n^n} = 4$ . Posons alors  $X = v_n^n$  : on a  $X + 1 + \frac{1}{X} = 4$ , ce qui s'écrit encore  $\frac{X^2 - 3X + 1}{X} = 0$ .

On résout donc  $X^2 - 3X + 1 = 0$  :  $\Delta = 5$  et donc  $X = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ .

Avec  $4 < 5 < 9$  on a  $2 < \sqrt{5} < 3$  et donc  $\frac{3 - \sqrt{5}}{2} < \frac{1}{2}$  : cette solution ne peut pas être  $v_n^n$  car  $v_n > 1$ .

On en déduit donc  $v_n^n = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ .

- (b) **Retrouver à l'aide de la question précédente la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .**

On a  $v_n = (v_n^n)^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .

## Exercice 2 (une suite récurrente)

On donne :  $0.69 < \ln 2 < 0.70$ . On considère l'application :

$$\begin{aligned} g: ]0, +\infty[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 + \ln(x) \end{aligned}$$

1. **Montrer que  $g$  est continue et strictement croissante sur  $]0, +\infty[$  et déterminer les limites de  $g$  en 0 et en  $+\infty$ .**

La continuité est évidente par composée de fonctions continues sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Les mêmes arguments donnent la dérivabilité et on a :  $\forall x > 0, g'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$ .

$g$  est donc strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ . Les limites usuelles donnent

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

2. **Montrer que l'équation  $g(x) = 0$ , d'inconnue  $x \in ]0, +\infty[$ , admet une solution et une seule. On note  $\alpha$  l'unique solution de cette équation.**

Les résultats de la question précédente montrent, par théorème de la bijection, que  $g$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}_+^*$  sur  $\mathbb{R}$ .  $0 \in \mathbb{R}$ , donc il existe un unique  $\alpha > 0$  tel que  $g(\alpha) = 0$ .

3. **Montrer :**  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ .

On calcule  $g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \ln(2) < 0$  avec la valeur approchée de  $\ln(2)$  fournie. On a aussi  $g(1) = 1 > 0$ , donc

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{2}\right) < 0 < g(1) &\Leftrightarrow g\left(\frac{1}{2}\right) < g(\alpha) < g(1) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} < \alpha < 1 \end{aligned}$$

par stricte croissance de  $g$ .

On note  $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ , et on considère l'application :

$$\begin{aligned} f: I &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\ln(x) \end{aligned}$$

4. (a) **Montrer que  $f$  est strictement croissante sur  $I$ . On rappelle que  $\sqrt{2} \approx 1.4$ .**

$$f \text{ est dérivable sur } I \text{ et } f'(x) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{4x} = \frac{4x - 2x^2 - 1}{4x}.$$

Le dénominateur est  $> 0$  ; étudions alors le signe du trinôme au numérateur.

$$\Delta = 8 \text{ donc les deux racines sont } \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{-4} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ La valeur approchée de } \sqrt{2} \text{ donne } 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{1}{2} < 1 < 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

donc sur  $I$ , le trinôme est positif et  $f'$  est donc  $> 0$ .

$f$  est donc strictement croissante sur  $I$ .

- (b) **Montrer :**  $\frac{1}{2} < f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1) < 1$ .

$$\text{On voit que } f(x) = x - \frac{1}{4}g(x).$$

$g$  est strictement croissante et s'annule en  $\alpha$ , donc est strictement négative en  $\frac{1}{2}$  et strictement positive en 1 (car  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ ).

$$\text{Ainsi } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \underbrace{\frac{1}{4}g\left(\frac{1}{2}\right)}_{<0} > \frac{1}{2} \text{ et de manière similaire, } f(1) < 1.$$

Enfin, la stricte croissance de  $f$  sur  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$  donne  $f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1)$ .

- (c) **En déduire :**  $\forall x \in I, f(x) \in I$ .

Si  $x \in I$  on a  $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$  ; par croissance de  $f$  sur  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$  on en déduit  $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(x) \leq f(1)$ , puis avec ce qui précède :

$$\frac{1}{2} < f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(x) \leq f(1) < 1$$

ce qui montre que  $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$ .

5. **On considère la suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 1$ , et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .**

- (a) **Calculer  $u_1$ .**

$$u_1 = f(u_0) = f(1) = \frac{3}{4}.$$

- (b) **Montrer :**  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$ .

On procède par récurrence.

Au rang 0,  $u_0 = 1 \in I$ .

Si on suppose  $u_n \in I$  alors d'après la question 4c,  $f(u_n) \in I$  et donc  $u_{n+1} \in I$  : on a donc l'hérédité.

Finalement :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$ .

- (c) **Montrer par récurrence que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.**

On cherche donc à montrer par récurrence la propriété  $\mathcal{P}_n$  : «  $u_{n+1} \leq u_n$  ».

Au rang 0, avec  $u_0 = 1$  et  $u_1 = \frac{3}{4}$  on a bien  $u_1 \leq u_0$ .

Si on suppose  $u_{n+1} \leq u_n$  pour un certain entier  $n$ , alors,  $f$  étant croissante sur  $I$  et  $u_n, u_{n+1}$  étant deux éléments de  $I$  on peut écrire :  $f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$  et donc  $u_{n+2} \leq u_{n+1}$ . Ceci donne l'hérédité et permet de conclure.

- (d) **Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et que sa limite est le réel  $\alpha$ .**

$(u_n)$  est donc décroissante, minorée par  $\frac{1}{2}$  car à valeurs dans  $I$  : elle converge vers une limite  $\ell \in$

$$\left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

$f$  étant continue sur  $I$  le théorème du point fixe s'applique et on a donc  $f(\ell) = \ell$ , ce qui équivaut facilement à  $g(\ell) = 0$ .

Or  $\alpha$  est la seule solution de l'équation  $g(x) = 0$  : on a donc bien  $\ell = \alpha$ .

### Exercice 3 (Probabilités)

Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est  $p$  et la proportion de boules noires est  $q$ .

Ainsi, on a :  $(p, q) \in ]0, 1[{}^2$ , et  $p + q = 1$ . De plus,  $p$  est la probabilité de tirer une boule blanche dans cette urne, et  $q$  celle de tirer une noire.

#### Partie I : Tirages avec arrêt dès qu'une boule noire a été obtenue

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire.

On note  $T$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et  $U$  la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. **Reconnaître la loi de  $T$ . Pour tout entier  $k \geq 1$ , donner  $P(T = k)$  et rappeler l'espérance et la variance de  $T$ .**

$T$  mesure le nombre d'expériences indépendantes nécessaires avant d'obtenir un « succès », défini ici comme l'obtention d'une boule noire. Cet événement a une probabilité  $q$ , donc  $T \hookrightarrow \mathcal{G}(q)$ . On en déduit

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(T = k) = p^{k-1} q ; \quad E(T) = \frac{1}{q}, \quad V(T) = \frac{p}{q^2}$$

2. **En déduire que  $U$  admet une espérance ; calculer  $E(U)$ .**

Vu le protocole, on a  $U = T - 1$  ; on en déduit que  $U$  admet une espérance et une variance, et d'après les propriétés de l'espérance  $E(U) = E(T - 1) = E(T) - 1 = \frac{p}{q}$ .

#### Partie II : Tirages avec arrêt dès qu'une boule blanche et une boule noire ont été obtenues

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule blanche et au moins une boule noire.

On note :

- $X$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
- $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
- $Z$  la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.

Pour tout entier naturel non nul  $i$ , on note :

- $B_i$  l'événement « la  $i$ -ème boule tirée est blanche »,
- $N_i$  l'événement « la  $i$ -ème boule tirée est noire ».

Dans les questions qui suivent, on prendra soin de formuler les événements considérés à l'aide des événements  $B_i$  et  $N_i$ .

3. (a) **Déterminer  $X(\Omega)$ .**

Pour obtenir au moins une boule de chaque couleur il faut au moins 2 tirages.

De plus, pour  $k \geq 2$  quelconque, on peut avoir  $X = k$  si on tire  $k - 1$  noires suivies d'une blanche.

Ainsi,  $X(\Omega) = [2, +\infty[ = \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ .

- (b) **Montrer, pour tout entier  $k \geq 2$  :  $P(X = k) = q p^{k-1} + p q^{k-1}$ .**

Soit  $k \geq 2$ .

En termes d'événements :  $(X = k) = (B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{k-1}) \cap N_k \sqcup ((N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{k-1}) \cap B_k)$  ; ce qui donne, par indépendance des différents tirages et incompatibilité de l'union :

$$P(X = k) = p^{k-1} q + q^{k-1} p$$

- (c) **Vérifier :**  $\sum_{k=2}^{+\infty} P(X = k) = 1$ .

Il s'agit d'effectuer des sommes géométriques (valides car  $|p| < 1$  et  $|q| < 1$ ) :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{+\infty} P(X = k) &= q \sum_{k=2}^{+\infty} p^{k-1} + p \sum_{k=2}^{+\infty} q^{k-1} \\ &= q \frac{p}{1-p} + p \frac{q}{1-q} = q \frac{p}{q} + p \frac{q}{p} = p + q = 1\end{aligned}$$

- (d) **Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que :**  $E(X) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ .

$\forall k \geq 2$ ,  $kP(X = k) = qkp^{k-1} + pkq^{k-1}$ . Ces deux séries convergent absolument (dérivées de séries géométriques, avec  $|p| < 1$  et  $|q| < 1$ ).

Le calcul de l'espérance se fait avec la formule donnant  $\sum kx^{k-1}$  ; attention les sommes commencent à  $k = 2$  donc il faut d'abord faire apparaître des sommes commençant à  $k = 1$  :

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_{k=2}^{+\infty} kP(X = k) = q \sum_{k=2}^{+\infty} kp^{k-1} + p \sum_{k=2}^{+\infty} kq^{k-1} \\ &= q \left( \left( \sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1} \right) - 1 \right) + p \left( \left( \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} \right) - 1 \right) \\ &= q \left( \frac{1}{(1-p)^2} - 1 \right) + p \left( \frac{1}{(1-q)^2} - 1 \right) \\ &= q \left( \frac{1}{q^2} - 1 \right) + p \left( \frac{1}{p^2} - 1 \right) = \frac{1}{q} - q + \frac{1}{p} - p = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - (p + q) \\ E(X) &= \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - 1\end{aligned}$$

4. (a) **Pour tout entier  $k \geq 2$ , déterminer  $P((X = k) \cap (Y = 1))$  (on distinguera les cas  $k = 2$  et  $k \geq 3$ ).**

- On commence par  $k = 2$ . Il s'agit de tirer 2 boules dont 1 blanche. Le protocole impose de s'arrêter dès que les deux couleurs ont été obtenues : les tirages à considérer sont NB et BN.  $((X = 2) \cap (Y = 1)) = (B_1 \cap N_2) \sqcup (N_1 \cap B_2)$ , ce qui donne

$$P((X = 2) \cap (Y = 1)) = 2pq$$

- Soit  $k \geq 3$ . Considérons un tirage avec une blanche et  $k - 1$  noires. Si la blanche n'est pas en première position, elle est en dernière position (car on arrêtera l'expérience au tirage de la blanche) ; si elle est en première position, la suivante est noire et le tirage s'arrête au bout de 2 boules ; or  $k \geq 3$  donc ici ce n'est pas possible.

*Conclusion :* la blanche est en dernier. On a donc

$$\forall k \geq 3, P((X = k) \cap (Y = 1)) = P(N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k) = q^{k-1}p$$

- (b) **En déduire :**  $P(Y = 1) = q(1 + p)$ .

**On pourra utiliser le système complet d'événements associé à la variable X.**

Avec la formule des probabilités totales appliquée au SCE  $((X = k))_{k \geq 2}$  :

$$P(Y = 1) = \sum_{k=2}^{+\infty} P((X = k) \cap (Y = 1)) = 2pq + \sum_{k=3}^{+\infty} q^{k-1}p = 2pq + pq^2 \frac{1}{1-q} = 2pq + q^2 = q(2p + q) = q(1 + p)$$

en utilisant  $p + q = 1$ .

(NB : attention à bien séparer le terme  $k = 2$  du reste de la somme !)

- (c) **Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.**

Il reste à calculer  $P(Y = j)$  pour  $j \geq 2$ . Les tirages menant à  $j \geq 2$  boules blanches commencent forcément par une blanche (si on commence par une noire l'expérience s'arrête dès qu'on tire une blanche) ; ce sont donc ceux de la forme BB...BN avec  $j$  apparitions de B.

On a alors

$$\forall j \geq 2, (Y = j) = B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_j \cap N_{j+1}$$

et donc, toujours par indépendance,

$$\forall j \geq 2, P(Y = j) = p^j q$$

**On admet que l'espérance de Y existe et que :**  $E(Y) = \frac{1}{q}(1 - p + p^2)$ .

**5. Donner la loi de Z et son espérance.**

On inverse le rôle des boules blanches et noires, donc  $p \leftrightarrow q$ . On trouve

$$P(Z = 1) = 2pq, \text{ et } \forall j \geq 2, P(Z = j) = q^j p$$

On trouve aussi  $E(Z) = \frac{1}{p}(1 - q + q^2)$ .

**6. Montrer que les variables aléatoires YZ et X - 1 sont égales.**

Vu le protocole expérimental, tout tirage de  $k$  boules (avec  $k \geq 2$ ) comporte 1 boule d'une couleur et  $k - 1$  boules de l'autre couleur. Donc  $(X = k) \subset (Y = k - 1, Z = 1) \cup (Y = 1, Z = k - 1)$ . Réciproquement, si  $Y = 1$  et  $Z = k - 1$ , ou  $Y = k - 1$  et  $Z = 1$ , on a bien  $X + Y = Z = k$ , d'où l'inclusion réciproque et l'égalité. On a donc :

$$\forall k \geq 2, (X = k) = (YZ = k - 1)$$

ce qui donne bien  $YZ = X - 1$ .

## Exercice 4 (Équivalent de Stirling)

**1. On définit la fonction  $f$  par :**

$$f(x) = \left(1 + \frac{x}{2}\right) \ln(1 + x) - x$$

- (a) **Quel est l'ensemble de définition de  $f$  ? Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur cet ensemble de définition, que l'on notera  $\mathcal{D}_f$ .**

L'expression donnant  $f(x)$  est définie dès que  $1 + x > 0$  ; d'où  $\mathcal{D}_f = ]-1, +\infty[$ .

Sur cet intervalle,  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  comme composée de fonctions  $\mathcal{C}^\infty$ .

- (b) **Calculer  $f'(x)$  ; montrer :  $\forall x \in \mathcal{D}_f, f''(x) = \frac{x}{2(1+x)^2}$ .**

**Déterminer le signe de  $f'$ , les variations de  $f$  et le signe de  $f$  sur  $\mathcal{D}_f$ .**

En dérivant un produit pour le premier terme :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f'(x) = \frac{1}{2} \ln(1 + x) + \left(1 + \frac{x}{2}\right) \frac{1}{1 + x} - 1 = \frac{1}{2} \ln(1 + x) + \frac{x + 2}{2(1 + x)} - 1$$

puis

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f''(x) = \frac{1}{2(1+x)} - \frac{1}{2(1+x)^2} = \frac{1+x}{2(1+x)^2} - \frac{1}{2(1+x)^2} = \frac{x}{2(1+x)^2}$$

On en déduit les tableaux de variation et de signe suivants :

| $x$      | -1 | 0     | $+\infty$ |
|----------|----|-------|-----------|
| $f''(x)$ | -  | 0     | +         |
| $f'(x)$  |    | ↘ 0 ↗ |           |
| $f'(x)$  |    | +     |           |
| $f(x)$   |    | ↗ 0 ↗ |           |
| $f(x)$   | -  | 0     | +         |

(c) **Montrer :**  $\forall x \in \mathbb{R}^+, f''(x) \leq \frac{x}{2}$ .

On a  $f''(x) = \frac{x}{2(1+x)^2}$  sur  $\mathcal{D}_f$ . Pour  $x \geq 0$ ,  $1+x \geq 1$  donc  $(1+x)^2 \geq 1$ , donc  $\frac{1}{2(1+x)^2} \leq \frac{1}{2}$ ; et en multipliant par  $x \geq 0$  on trouve bien  $f''(x) \leq \frac{x}{2}$ .

(d) **En déduire :**  $\forall x \in \mathbb{R}^+, 0 \leq f(x) \leq \frac{x^3}{12}$ .

D'après le tableau de signes de  $f$  :  $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \geq 0$ .

D'autre part : si  $x$  est positif, on a, pour tout  $t \in [0, x]$ ,  $f''(t) \leq \frac{t}{2}$ ; on peut donc intégrer cette inégalité sur  $[0, x]$  et obtenir :

$$\begin{aligned} \int_0^x f''(t) dt &\leq \int_0^x \frac{t}{2} dt \\ f'(x) - f'(0) &\leq \left[ \frac{t^2}{4} \right]_0^x \\ f'(x) &\leq \frac{x^2}{4} \end{aligned}$$

On intègre à nouveau l'inégalité  $f'(t) \leq \frac{t^2}{4}$  sur  $[0, x]$  :

$$\begin{aligned} \int_0^x f'(t) dt &\leq \int_0^x \frac{t^2}{4} dt \\ f(x) - f(0) &\leq \left[ \frac{t^3}{12} \right]_0^x \\ f(x) &\leq \frac{x^3}{12} \end{aligned}$$

2. On définit dans cette question la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \ln \left( \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}} \right)$$

(a) **En calculant soigneusement  $u_n - u_{n+1}$ , démontrer que :**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n - u_{n+1} = n f \left( \frac{1}{n} \right)$$

On a

$$u_n - u_{n+1} = \ln \left( \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}} \right) - \ln \left( \frac{(n+1)! e^{n+1}}{(n+1)^{n+1} \sqrt{n+1}} \right) = \ln \left( \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}} \frac{(n+1)^{n+1} \sqrt{n+1}}{(n+1)! e^{n+1}} \right)$$

On ne panique pas et on essaie de réorganiser ce gros quotient pour faire apparaître des simplifications :

$$\begin{aligned} \frac{n! e^n (n+1)^{n+1} \sqrt{n+1}}{n^n \sqrt{n} (n+1)! e^{n+1}} &= \frac{n!}{(n+1)!} \times \frac{e^n}{e^{n+1}} \times \sqrt{\frac{n+1}{n}} \times (n+1) \times \left( \frac{n+1}{n} \right)^n \\ &= \frac{1}{(n+1)} \times \frac{1}{e} \times \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \times (n+1) \times \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \\ &= \frac{1}{e} \times \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1/2} \end{aligned}$$

d'où

$$u_n - u_{n+1} = \ln \left( \frac{1}{e} \times \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1/2} \right) = -1 + \left( n + \frac{1}{2} \right) \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$$

Par ailleurs,  $n f \left( \frac{1}{n} \right) = n \left( \left( 1 + \frac{1}{2n} \right) \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right) = \left( n + \frac{1}{2} \right) \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - 1$  : on obtient bien la même expression.



- (b) **En déduire que la série  $\sum (u_n - u_{n+1})$  est convergente.**

Cette série est donc aussi la série  $\sum n f\left(\frac{1}{n}\right)$ . C'est une série à termes positifs car  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}_+$  ; de plus on sait que pour tout  $x \geq 0$ ,  $f(x) \leq \frac{x^3}{12}$  ; d'où en appliquant en  $x = \frac{1}{n}$  (qui est bien positif) puis en multipliant par  $n > 0$  :

$$n f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{12n^2}$$

Le terme général de la série qui nous occupe est donc majoré par le terme général d'une série de Riemann convergente ( $\alpha = 2 > 1$ ) donc par comparaison de SATP,  $\sum (u_n - u_{n+1})$  converge.

- (c) **Quelle est la nature de la suite  $(u_n)$  ?**

Classiquement, une suite a même comportement que sa série télescopique associée, donc on vient de voir la convergence.

Si on veut le redémontrer : pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , un télescopage donne

$$u_0 - u_n = \sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1})$$

Le terme de droite admet une limite finie pour  $n \rightarrow +\infty$  car ce sont les sommes partielles d'une série convergente ; donc celui de gauche aussi, et  $(u_n)$  admet bien une limite finie.

- (d) **En déduire qu'il existe une constante  $C > 0$  (qu'on ne cherchera pas à calculer) telle que :**

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C \frac{n^n}{e^n} \sqrt{n}$$

Notons donc  $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ . On a donc par passage à l'exponentielle :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}} = e^a$$

On note alors  $C = e^a > 0$  ; on peut reformuler cette dernière limite avec l'équivalent :

$$\frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C$$

et après multiplication par  $\frac{n^n \sqrt{n}}{e^n}$  (opération légitime sur les équivalents) on arrive bien à

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C \frac{n^n \sqrt{n}}{e^n}$$

Une recherche sur Internet vous apprendra que  $C = \sqrt{2\pi}$ , mais c'est un peu plus compliqué à obtenir.