

Mini-devoir surveillé n°3

17/12/2022

Durée : 1h

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que -2 est valeur propre de A et calculer le sous-espace propre associé.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A pour la valeur propre λ ssi $\lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0$. En déduire deux autres valeurs propres de A .
3. Donner une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

On considère trois suites récurrentes $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n + c_n \\ b_{n+1} = a_n - b_n + c_n \\ c_{n+1} = a_n + b_n - c_n \end{cases}$$

On pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

4. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A^n U_0$.
5. Justifier qu'il existe des réels α, β, γ tels que

$$U_0 = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6. Montrer, pour tout entier n :

$$\begin{cases} a_n = \beta(1 + \sqrt{3})^{n+1} + \gamma(1 - \sqrt{3})^{n+1} \\ b_n = \alpha(-2)^n + \beta(1 + \sqrt{3})^n + \gamma(1 - \sqrt{3})^n \\ c_n = -\alpha(-2)^n + \beta(1 + \sqrt{3})^n + \gamma(1 - \sqrt{3})^n \end{cases}$$

7. On donne $\sqrt{3} \simeq 1,7$.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur α, β, γ pour que les trois suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soient de limite nulle.

Montrer que cette condition équivaut au fait que $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ appartienne au sous-espace propre de A associé à une valeur propre qu'on précisera.