

Corrige

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1°) On cherche à déterminer l'existence de solutions non-nulles à l'équation  $AX = -2X$  :

$$AX = -2X \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = -2x \\ x - y + z = -2y \\ x + y - z = -2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ \cancel{x + y + z = 0} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (l_2 - l_1) \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } E_{-2}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x=0, y+z=0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \overline{\text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)} \neq \{0\}$$

et on a bien  $-2 \in \text{Sp}(A)$

2) On calcule :

(2)

$$A \times \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda+2 \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

En notant  $X_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , on a  $AX_\lambda = \lambda X_\lambda \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2\lambda+2 \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda+2 = \lambda^2 \\ \lambda = \lambda \\ \lambda = \lambda \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0.$$

$X_\lambda$  étant non nul, on a bien :  $\left[ \begin{array}{l} X_\lambda \text{ v.e.p. de } A \text{ pour la valeur propre } \lambda \\ \text{si } \lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0 \end{array} \right]$

On résout alors :

$$\lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0.$$

$$\Delta = 4 + 8 = 12 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{2 + \sqrt{12}}{2} = \underline{\underline{1 + \sqrt{3}}} ; \quad \lambda_2 = \underline{\underline{1 - \sqrt{3}}}.$$

Sont deux valeurs propres de  $A$ .

3)  $A \in M_3(\mathbb{R})$  a trois valeurs propres :  $-2, 1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}$ .

Tous ses sous-espaces propres sont donc de dimension 1.

$$\text{On a : } E_{-2}(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad (\text{déjà vu}).$$

et d'après la question 2,  $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_{1+\sqrt{3}}(A)$

$$\begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_{1-\sqrt{3}}(A).$$

On pose alors  $P = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  :  $P$  est inversible car ses

colonnes forment une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes.

On a alors  $D = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$  telle que  $A = PDP^{-1}$

h) La relat° vérifiée par ces 3 suites se réécrit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = AU_n$$

Montrons par récurrence en  $n \in \mathbb{N}$  :  $U_n = A^n U_0$

\* pour  $n=0$ ,  $A^0 U_0 = I_3 U_0 = U_0$  : la propriété est vraie.

\* soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé ; on suppose  $U_n = A^n U_0$

Alors  $U_{n+1} = AU_n = A \cdot A^n U_0 = A^{n+1} U_0$  d'où l'hérédité.

Final<sup>re</sup> :  $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A^n U_0}$

5) On a justifié que la famille

(3)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ est une base de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

$\alpha, \beta, \gamma$  existent (et sont uniques) car ce sont les coordonnées de la colonne  $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$  dans cette base.

6. D'après 4. et 5:

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A^n U_0 = A^n \left( \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{On: } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_{-2}(A) \Rightarrow A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -2 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et une récurrence simple}$$

$$\text{montre que : } \forall n \in \mathbb{N}, A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-2)^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{de même } A^n \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1+\sqrt{3})^n \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1-\sqrt{3})^n \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et donc: } \forall n \in \mathbb{N}, U_n = \alpha (-2)^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta (1+\sqrt{3})^n \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma (1-\sqrt{3})^n \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc en isolant les 3 coordonnées:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n &= \beta(1+\sqrt{3})^{n+1} + \gamma(1-\sqrt{3})^{n+1} \\ b_n &= \alpha(-2)^n + \beta(1+\sqrt{3})^n + \gamma(1-\sqrt{3})^n \\ c_n &= -\alpha(-2)^n + \beta(1+\sqrt{3})^n + \gamma(1-\sqrt{3})^n. \end{aligned}$$

7°) On regarde les suites géométriques:

- $((-2)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'a pas de limite
- $1+\sqrt{3} \simeq 2,7 > 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1+\sqrt{3})^n = +\infty$
- $1-\sqrt{3} \simeq -0,7 \in ]-1, 1[$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1-\sqrt{3})^n = 0$ .

On voit alors que:

\* si  $\beta \neq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \pm \infty$  (suivant le signe de  $\beta$ )

donc pour que  $(a_n)$  tende vers 0, il faut  $\beta = 0$

Avec  $\beta = 0$ ,  $b_n = \underbrace{\alpha(-2)^n}_{\text{pas de limite}} + \underbrace{\gamma(1-\sqrt{3})^n}_{\rightarrow 0}$  donc pour que  $b_n \rightarrow 0$ , il faut  $\alpha = 0$

Récapitulons: on a montré  $\begin{cases} (a_n) \rightarrow 0 \\ (b_n) \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

(et donc: "les 3 suites  $(a_n), (b_n), (c_n)$  tendant vers 0"  $\Rightarrow \alpha = \beta = 0$ .)

l'écouter, si  $\alpha = \beta = 0$  :

$$\begin{aligned} \forall n, \quad a_n &= \gamma(1-\sqrt{3})^{n+1} \\ b_n &= \gamma(1-\sqrt{3})^n \\ c_n &= \gamma(1-\sqrt{3})^n \end{aligned}$$

et on a montré qu'alors ces 3 suites tendent vers 0.

On a bien :

$$\left( \begin{array}{l} (a_n) \rightarrow 0 \\ (b_n) \rightarrow 0 \\ (c_n) \rightarrow 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$$

Ceci équivaut à  $U_0 = \gamma \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$

soit encore à :  $\boxed{\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} \in E_{1-\sqrt{3}}(A)}$

Car on a montré en q3 que  $E_{1-\sqrt{3}}(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$$\left( \text{car } \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_{1-\sqrt{3}}(A), \text{ et } \dim(E_{1-\sqrt{3}}(A)) = 1 \right)$$