

Exercice 1 ("Sujet zéro" ENL 2023)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1a. Les trois colonnes de A sont colinéaires donc $\text{rg}(A) \leq 1$.

Comme A est non nulle : $\boxed{\text{rg}(A) = 1}$

1b. $\text{rg}(A) = 1 < 3$ donc A n'est pas inversible ; donc $\underline{0 \in \text{Sp}(A)}$

le sous-espace propre associé est $\text{Ker}(A)$.

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A) \Leftrightarrow -x - 2y + z = 0$
 (les 3 lignes de A étant proportionnelles !)

$$(\Leftrightarrow) \quad \underline{z = x + 2y}$$

Ainsi $\text{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+2y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}^2 \right\} = \underline{\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)}$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ est génératrice de $\text{Ker}(A)$; libre car composée de 2 vecteurs non colinéaires : $\boxed{\text{c'est une base de } \text{Ker}(A)}$

$$1c. A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix} = -6 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Comme $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, c'est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -6 .

$$1d. \text{ On pose } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Si C_1, C_2, C_3 sont les 3 colonnes de P , (C_1, C_2) est une base de $E_0(A)$ et $C_3 \in E_{-6}(A)$; donc (C_1, C_2, C_3) est libre.

P est donc inversible.

$$\text{En posant } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}, \text{ on a bien } \boxed{A = PDP^{-1}}$$

$$2^o) \text{ En posant } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \text{ on voit que (SH) se réécrit } \underline{\underline{X' = AX}}$$

où A est définie précédemment.

Comme on dispose d'une base de vecteurs propres de A :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (vap. 0)} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ (vap. 0)} , \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (vap. -6)}$$

on peut écrire:

les solut^o de (SH) sont les fonctions de la forme

(2)

$$t \mapsto K_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + K_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + K_3 e^{-6t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ où } (K_1, K_2, K_3) \in \mathbb{R}^3$$

3) Les points d'équilibre de (SH) sont les éléments de $\text{Ker}(A)$
(déterminé en 1b).

4) De telles solutions X_1 et X_2 sont solutions du problème de Cauchy
$$\begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \quad (\text{où on note } X_0 = X_1(t_0) = X_2(t_0))$$

Comme un problème de Cauchy admet une unique solution (théorème de Cauchy) on en conclut que $\boxed{X_1 = X_2}$

5a) Le système étant homogène, la fonction nulle $X: t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une solution de (SH) vérifiant la condition initiale.

D'après 4) c'est la seule.

$$\Rightarrow \boxed{X: t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ est l'unique solut}^o \text{ de (SH) vérifiant } X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

5b. la solut^o recherchée est de la forme (d'après 2)

$$X(t) = \begin{pmatrix} K_1 + K_3 e^{-6t} \\ K_2 - 2K_3 e^{-6t} \\ K_1 + 2K_2 + K_3 e^{-6t} \end{pmatrix}. \text{ On a alors } X(0) = \begin{pmatrix} K_1 + K_3 \\ K_2 - 2K_3 \\ K_1 + 2K_2 + K_3 \end{pmatrix}$$

On cherche alors les solutions du système suivant:

$$\begin{cases} K_1 + K_3 = 1 \\ K_2 - 2K_3 = 1 \\ K_1 + 2K_2 + K_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K_1 = 1 - K_3 \\ K_2 = 1 + 2K_3 \\ (1 - K_3) + 2(1 + 2K_3) + K_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} K_1 = 1 - K_3 \\ K_2 = 1 + 2K_3 \\ 3 + 4K_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} K_1 = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} \\ K_2 = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \\ K_3 = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

La solut^o recherchée est:

$$X: t \mapsto \frac{7}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{4} e^{-6t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6°) Dans la figure 2, on voit que les solutions grandissent très vite ce qui fait penser à des solutions divergentes:

c'est impossible car $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$.

Dans la figure 3, en regardant les courbes en 0 on voit que

$$X(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ ce qui n'est pas ce que donne l'énoncé.}$$

La figure 2 (a les bonnes conditions initiales et montre des solutions convergentes: celle-ci est cohérente avec ce qui a été vu jusqu'à présent.

7a. On remarque que le système se réécrit

(3)

$$X'(t) = A X(t) + \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{B(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix}}$$

7b. Démonstration proche du cas...

Y est solution de (S) donc vérifie $Y' = AY + B(t)$.

Alors : X est solut^o de (S) $\Leftrightarrow X' = AX + B(t)$ or $B(t) = Y' - AY$

$$\Leftrightarrow X' = AX + Y' - AY$$

$$\Leftrightarrow X' - Y' = A(X - Y)$$

$$\Leftrightarrow (X - Y)' = A(X - Y)$$

$$\text{donc } \boxed{X \text{ est solut}^o \text{ de (S)} \Leftrightarrow X - Y \text{ est solut}^o \text{ de (SH)}}$$

7c. Avec ces fonctions a, b, c , (S) se réécrit :

$$(S): \begin{cases} x'(t) = -x(t) - 2y(t) + z(t) - 1 \\ y'(t) = -2x(t) - 4y(t) + 2z(t) + 2(e^{-t} - 1) \\ z'(t) = x(t) + 2y(t) - z(t) + 1 - e^{-t} \end{cases}$$

On cherche à vérifier si $Y: t \mapsto \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est solut^o; ie si la fonction

$x: t \mapsto e^{-t}$
 $y: t \mapsto 0$
 $z: t \mapsto 1$

est solut^o de (S).

1° équation : $x'(t) = -e^{-t}$
 $-x(t) - 2y(t) + 3z(t) + 1 = -e^{-t} - 0 + 1 - 1 = -e^{-t}$ donc l'éq. 1 est vérifiée.

2° équation : $y'(t) = 0$
 $-2x(t) - 4y(t) + 2z(t) + 2(e^{-t} - 1) = -2e^{-t} - 0 + 2 + 2(e^{-t} - 1) = 0$ ✓

3° équation : $z'(t) = 0$
 $x(t) + 2y(t) - z(t) + 1 - e^{-t} = e^{-t} + 0 - 1 + 1 - e^{-t} = 0$ ✓

γ est bien une solut^o de (E) sur \mathbb{R} .

D'après 7b :

X est solut^o de (S) sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow X(t) - \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est sol. de (SH) sur \mathbb{R}

$(\Rightarrow) \quad X(t) - \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = K_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + K_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + K_3 e^{-6t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad K_1, K_2, K_3 \text{ réels}$

$(\Rightarrow) \quad X(t) = \begin{pmatrix} K_1 + K_3 e^{-6t} + e^{-t} \\ K_2 - 2K_3 e^{-6t} \\ K_1 + 2K_2 + K_3 e^{-6t} + 1 \end{pmatrix} \quad \text{où } K_1, K_2, K_3 \text{ réels}$