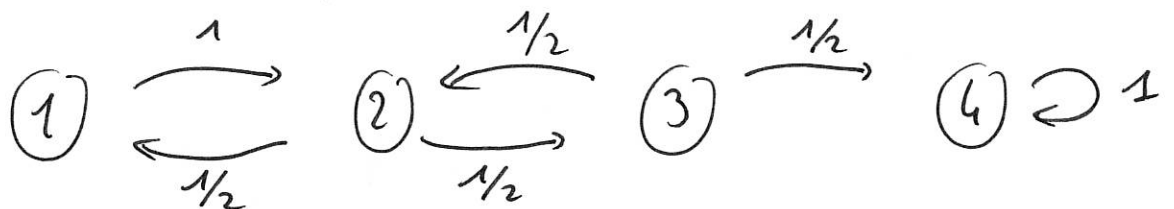


①

DS4
Problème
(d'après EDHEC 96S)

1) A chaque instant, la position ^{succédante} du mobile ne dépend que de sa posit° actuelle: on a bien une chaîne de Markov.

Les règles du voyage permettent de tracer le graphe suivant:



Le coefficient (i,j) de la matrice de transition étant le poids de la flèche $(i) \rightarrow (j)$, on trouve bien:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Montrer $V_{n+1} = V_n \cdot M$ revient à montrer:

$$\begin{cases} P(X_{n+1}=1) = 1/2 P(X_n=2) \\ P(X_{n+1}=2) = P(X_n=1) + 1/2 P(X_n=3) \\ P(X_{n+1}=3) = 1/2 P(X_n=2) \\ P(X_{n+1}=4) = 1/2 P(X_n=3) + P(X_n=4) \end{cases}$$

On montre par exemple la seconde :

Par formule des probabilités totales avec le système complet

$$(P(X_n = i))_{1 \leq i \leq 4}$$

$$\begin{aligned}
 P(X_{n+1} = 2) &= \left(P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2) \times P(X_n=1) \right) + \left(P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2) \times P(X_n=2) \right) + \left(P_{(X_n=3)}(X_{n+1}=2) \times P(X_n=3) \right) + \left(P_{(X_n=4)}(X_{n+1}=2) \times P(X_n=4) \right) \\
 &= 1 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Les autres cas sont similaires.

On peut aussi procéder plus généralement :

$$\forall j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket, \quad P(X_{n+1} = j) = \sum_{i=1}^4 \underbrace{P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)}_{m_{ij}} \cdot P(X_n = i)$$

$$P(X_{n+1} = j) = \sum_{i=1}^4 m_{ij} P(X_n = i)$$

ce qui se traduit bien matriciellement par $V_{n+1} = V_n \Pi$

$$3) \text{ . Par } n=0, \text{ on a bien } V_0 = V_0 I_n = V_0 \Pi^0$$

$$\text{ . Si } V_n = V_0 \Pi, \text{ alors } V_{n+1} = V_n \Pi = V_0 \Pi^n \Pi = V_0 \Pi^{n+1}$$

=> Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_n = V_0 \Pi^n$$

3) $t_n = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

(2)

On résout $t_n \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1/2 y = 0 \\ x + 1/2 z = 0 & l_2 \\ 1/2 y = 0 \\ 1/2 z + t = 0 & l_4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -2x & (l_2) \\ t = x & (\text{avec } l_2 - l_4) \end{cases}$

d'où $E_0(t_n) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \neq \{0\}$ et $0 \in \mathcal{S}_0(t_n)$

On résout aussi $t_n \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1/2 y = x \\ x + 1/2 z = y \\ 1/2 y = z \\ 1/2 z + t = t \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

d'où $E_1(t_n) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $1 \in \mathcal{S}_0(t_n)$

5)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 1 \\ -(2+\sqrt{3}) \end{pmatrix} \leftarrow \text{noté } X$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 3/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 1/2 - 2 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } {}^t\pi X = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 3/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ -3/2 - \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 1 \\ -\sqrt{3} - 2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2} X$$

$$\boxed{X \text{ étant non nulle, } \frac{\sqrt{3}}{2} \in \mathcal{S}_p({}^t\pi) \text{ et } X \in E_{\sqrt{3}/2}({}^t\pi)}$$

6. On a les 4 valeurs propres $0, 1, \pm \sqrt{3}/2$. ${}^t\pi \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ donc on sait qu'il n'y en a pas d'autres : $\boxed{\mathcal{S}_p({}^t\pi) = \{0, 1, \sqrt{3}/2, -\sqrt{3}/2\}}$

De plus, $\pi \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, admet 4 rap donc tous les sous-espaces propres sont de dimension 1.

On en déduit $E_{\sqrt{3}/2}({}^t\pi) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 1 \\ -(2+\sqrt{3}) \end{pmatrix} \right)$, et idem pour $E_{-\sqrt{3}/2}$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -(2+\sqrt{3}) & -(2-\sqrt{3}) \end{pmatrix}$$

vérifier la contrainte demandée

(inversible car ses colonnes sont des vecteurs propres de tP associés à des valeurs propres distinctes).

On peut calculer $P \times \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \\ 2\sqrt{3} & \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 2 & -\sqrt{3} & 1 & 0 \end{pmatrix}}_Q$; on trouve $6I_4$

$$PQ = 6I_4 \text{ donc } P\left(\frac{1}{6}Q\right) = I_4 \Rightarrow \boxed{P^{-1} = \frac{1}{6}Q}.$$

8) Une récurrence immédiate montre $({}^tP)^n = PD^nP^{-1}$.

On calcule le produit matriciel : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} PD^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2-\sqrt{3} & -2+\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\sqrt{3}/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-\sqrt{3}/2)^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & (\sqrt{3}/2)^n & (-\sqrt{3}/2)^n \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \cdot (\sqrt{3}/2)^n & -\sqrt{3} \cdot (-\sqrt{3}/2)^n \\ 0 & 0 & (\sqrt{3}/2)^n & (-\sqrt{3}/2)^n \\ 0 & 1 & (-2-\sqrt{3})(\sqrt{3}/2)^n & (-2+\sqrt{3})(-\sqrt{3}/2)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et $(t_n)^n = P D^n P^{-1}$

$$= \frac{1}{6} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n & \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n & -\sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \\ 0 & 0 & \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n & \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \\ 0 & 1 & (-2-\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n & (-2+\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 2 & -\sqrt{3} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n & - & - & - \\ 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n - 2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n & - & - & - \\ 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n & - & - & - \\ 6 + \frac{2}{3}(-2-\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + 2(-2+\sqrt{3})\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n & - & - & - \end{pmatrix}$$

d'où la première colonne:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \right) \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \right) \\ \frac{1}{3} \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \right) \\ 1 - \frac{1}{3}(2+\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + \frac{1}{3}(\sqrt{3}-2)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

[par $n=0$, $(t_n)^n = I_4$, de première colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$]

9. $V_0 = (P(X_0=1) \quad P(X_0=2) \quad P(X_0=3) \quad P(X_0=4))$ (4)

$= (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$ car le mobile part du point 1.

On a alors: $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = V_0 M^n$

$$= (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \times \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

donc on voit que V_n est la première ligne de M^n

\Rightarrow la loi de X_n est donnée par la colonne de $(M)^n$ transposée à la question précédente.

10) Soit $j \geq 3$. $(Y=j)$ est l'événement: "on est pour la première fois au point 4 après j déplacements"

si $Y=j$ alors $X_j=4$; et comme on n'était pas en "4" au temps $j-1$ on a forcément $X_{j-1}=3$ (on ne peut pas sauter de 1 en 4, ou de 2 en 4...)

d'où: $\underline{(Y=j) \subset (X_{j-1}=3) \cap (X_j=4)}$

Réciproquement, si $X_{j-1}=3$ et $X_j=4$, on est en 4 au tps j , et pour la première fois car on n'y était pas au temps $j-1$.

d'où $\underline{(Y=j) \supset (X_{j-1}=3) \cap (X_j=4)}$ et donc l'égalité recherchée

Enfin on a $Y(\omega) = \mathbb{N}_3, +\infty$ car il faut au moins 3 sauts pour arriver en 4.

$$\begin{aligned} \forall j \in \mathbb{N}_3, +\infty : P(Y=j) &= P((X_{j-1}=3) \cap (X_j=4)) \\ &= P_{(X_{j-1}=3)}(X_j=4) \times P(X_{j-1}=3) \\ &= \frac{1}{2} P(X_{j-1}=3) \end{aligned}$$

$$P(Y=j) = \frac{1}{6} \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^j + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^j \right) \text{ d'après 9°)}$$

11) On étudie la cv absolue de $\sum_{j \geq 3} j P(Y=j)$

$$\underbrace{|j P(Y=j)|}_{\geq 0} = \frac{1}{6} \left(j \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^j + j \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^j \right); \text{ car } \sqrt{3} < 2 \text{ donc } \left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right| < 1 \text{ et } \left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right| < 1$$

donc la série de terme général $j \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^j$ cv absolument

et $E(Y)$ existe.

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{j=3}^{+\infty} \frac{1}{6} \left(j \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^j + j \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^j \right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{j=3}^{+\infty} j \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{j-1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{j=3}^{+\infty} j \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{j-1} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - 2\sqrt{3} \right) = \dots \end{aligned}$$

Z est le n° de déplacements, pour aller en 3 par la première fois (5)

12°) Si $X_{j-1} = 2$ et $X_j = 3$, on est en 3 au temps j , mais pas forcément par la première fois! on peut aussi avoir $X_{j-2} = 3$.

donc $(X_{j-1} = 2) \cap (X_j = 3) \not\subset (Z = j)$

13°) $(Z = 2j)$ si on est en "3" par la première fois au temps $2j$.

D'après les règles de déplacement, on a

$$(Z = 2j) = (X_0 = 1) \cap (X_1 = 2) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 2) \cap \dots \cap (X_{2j-1} = 2) \cap (X_{2j} = 3)$$

(on oscille entre 1 et 2 jusqu'à aller en 3 par la 1^{re} fois au temps $2j$)

$(X_0 = 1)$ étant certain:

$$P(Z = 2j) = P_{(X_0=1)}(X_1=2) \times P_{(X_1=2)}(X_2=1) \times \dots \times P_{(X_{2j-2}=1)}(X_{2j-1}=2) \\ \times P_{(X_{2j-1}=2)}(X_{2j}=3)$$

$$= 1 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} \times \dots \times 1 \times \frac{1}{2}$$

avec les flèches $(1) \xrightarrow{1} (2)$ et $(1) \xleftarrow{1/2} (2)$; puis, $(2) \xrightarrow{1/2} (3)$ pour la dernière fois
d'où $\boxed{P(Z = 2j) = \left(\frac{1}{2}\right)^j}$

(par ex, pour $Z=4$: $(1) \xrightarrow{1} (2) \xleftarrow{1/2} (1) \xleftarrow{1/2} (2) \xrightarrow{1/2} (3)$: $P(Z=4) = \left(\frac{1}{2}\right)^2$)

14°) Comme on se déplace forcément à chaque étape quand on est ds (1), (2) ou (3) : si on est en (3), c'est forcément à un temps pair

Ainsi on ne peut pas "arriver" en (3) à un temps impair :

$$\forall j \in \mathbb{N}, P(Z = 2j+1) = 0.$$

15°) On a donc, la réserve de cv absolue :

$$E(Z) = \sum_{j=2}^{+\infty} j P(Z=j) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2k P(Z=2k) \quad \left(\begin{array}{l} \text{les termes de la} \\ \text{somme où } j \\ \text{est impair} \\ \text{sont nuls} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow E(Z) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2k \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

Série qui cv absolument (géométrique dérivée, $|\frac{1}{2}| < 1$)

$$E(Z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2})^2} = 4$$

16°) En observant le graphe :

def état_suivant(i):

if i == 1: # on saute forcément en 2
j = 2

elif i == 2: # on saute en 1 avec proba $\frac{1}{2}$, en 2 avec proba $\frac{1}{2}$

if rd.random() < $\frac{1}{2}$:

j = 1

else:

j = 3

16d. On fait quelque chose de similaire à 16b, mais on renvoie la liste si la dernière composante est h (au lieu de continuer à la remplir) (5)

def parcours2(m):

$L = [1]$

for h in range(m):

if $L[-1] == h$:

return L

else:

$L.append(\text{etat_suivant}(L[-1]))$

16e. Cette fois c'est plutôt un while: on se déplace sur le graphe jusqu'à arriver en h , et on compte le nombre de pas effectués.

def trace4():

$i = 1$ # position

$n = 0$ # nb de pas

while $i < 4$:

$i = \text{etat_suivant}(i)$

$n = n + 1$

return n

(initiale de mémoriser la trajectoire en entier...)

16f. On fait tourner 10000 fois la fonction précédente, on somme les résultats et on divise par 10000:

$S = 0$
for k in range(10000):
 $S = S + \text{trace4}()$
print($S / 10000$)

On doit trouver une valeur proche de $E(4)$; donc proche de 9

```

def i = 3 :
    if rd.random() < 1/2
        j = 2
    else :
        j = 4
else :
    j = 4
return j

```

16b. `def parcours(n)`
`L = [1]` # pos¹° initiale
for `k` in range(n) : # n sauts
`L.append(etat_suivant(L[-1]))` # on définit le nouvel état à partir du dernier en date
return L

16c. la première repose est incohérente car on ne peut pas sortir de 4.

la troisième aussi car on ne peut pas de 1

c'est donc la seconde repose