

Devoir surveillé n°4  
21/01/2022  
Durée : 4h

**Exercice : Systèmes différentiels**

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ .

1. Le but de cette question est de diagonaliser la matrice A.

(a) Justifier que la matrice A est de rang 1.

(b) En déduire une valeur propre de A ainsi qu'une base du sous-espace propre associé.

(c) Justifier que  $-6$  est valeur propre de A et qu'un vecteur propre associé est  $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

(d) Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que  $A = PDP^{-1}$ .

2. Résoudre le système différentiel :

$$(SH) : \begin{cases} x' &= -x - 2y + z \\ y' &= -2x - 4y + 2z \\ z' &= x + 2y - z \end{cases}$$

3. Quels sont les points d'équilibre de ce système ?

4. Soient  $X_1 : t \mapsto X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix}$  et  $X_2 : t \mapsto X_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$  deux solutions du système (SH).

On suppose qu'il existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  vérifiant  $X_1(t_0) = X_2(t_0)$ .

Que pouvez-vous dire de  $X_1$  et  $X_2$  ?

5. (a) Déterminer la solution  $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$  du système (SH) vérifiant  $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

(b) Déterminer la solution  $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$  du système (SH) vérifiant  $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

6. On utilise la commande `odeint` du package `scipy.integrate` de Python pour obtenir la solution du système différentiel (SH) avec la condition initiale  $X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

On trace les courbes de  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et on obtient un des trois dessins suivants : lequel ? Justifier votre réponse.

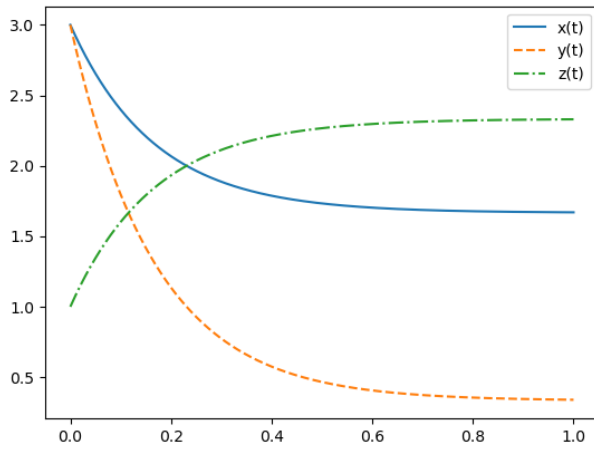


Figure 1

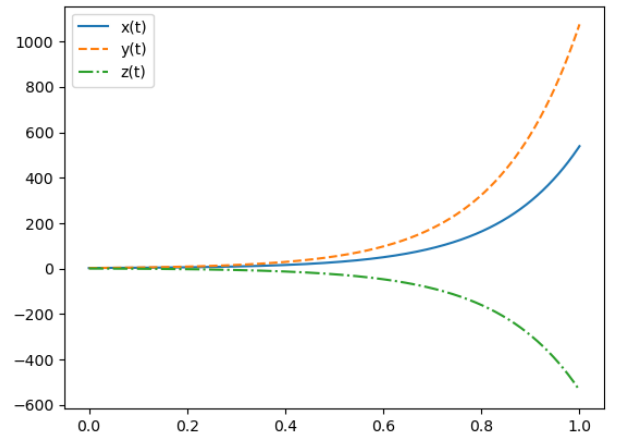


Figure 2

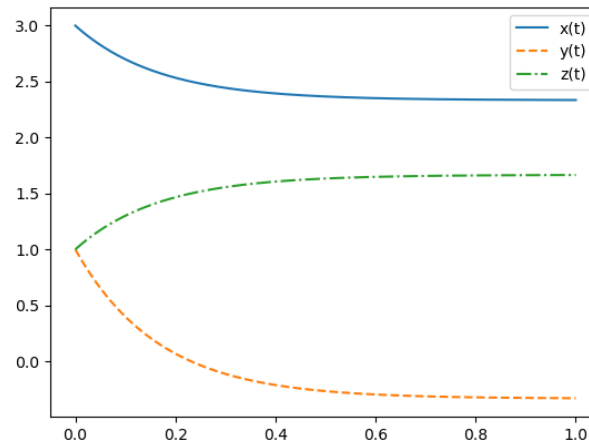


Figure 3

7. Dans cette question on considère trois fonctions continues  $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . On s'intéresse au système différentiel :

$$(S) : \begin{cases} x' &= -x - 2y + z + a(t) \\ y' &= -2x - 4y + 2z + b(t) , \\ z' &= x + 2y - z + c(t) \end{cases}$$

où  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ , inconnues, de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , de la variable réelle  $t$ .

Une solution de (S) sur  $\mathbb{R}$  est une application  $X: t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$  où  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que, pour tout  $t$  réel, on ait :

$$(S) : \begin{cases} x'(t) &= -x(t) - 2y(t) + z(t) + a(t) \\ y'(t) &= -2x(t) - 4y(t) + 2z(t) + b(t) \\ z'(t) &= x(t) + 2y(t) - z(t) + c(t) \end{cases}$$

- (a) Préciser quel vecteur colonne  $B(t) \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  dépendant de la variable réelle  $t$  permet d'écrire le système (S) sous la forme :

$$X' = AX + B(t).$$

- (b) Soit  $Y$  une solution particulière sur  $\mathbb{R}$  de (S). Démontrer que  $X: t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$  est solution de (S) sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $Z: t \mapsto X(t) - Y(t)$  est solution de (SH) sur  $\mathbb{R}$ , (SH) désignant le système de la question 2.

(c) Dans cette question, on pose pour  $t \in \mathbb{R}$  :  $a(t) = -1$ ,  $b(t) = 2(e^{-t} - 1)$ ,  $c(t) = 1 - e^{-t}$ .

Démontrer que  $Y : t \mapsto Y(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  est solution de (S) sur  $\mathbb{R}$ .

En déduire toutes les solutions du système différentiel (S) sur  $\mathbb{R}$ .

## Problème : Étude d'un parcours

Un mobile se déplace aléatoirement entre 4 positions sur un axe notées 1,2,3,4.

Les règles de ce « voyage » sont les suivantes :

- Le mobile est en 1 à l'instant 0.
- Le point 1 est « réfléchissant », c'est-à-dire que, si à l'instant  $n$  le mobile est en 1, il est certain qu'à l'instant  $(n+1)$  il sera en 2.
- Si à l'instant  $n$  le mobile est en 2, alors à l'instant  $(n+1)$ , il sera soit en 1, soit en 3, et ceci de façon équiprobable.
- Si à l'instant  $n$  le mobile est en 3, alors à l'instant  $(n+1)$ , il sera soit en 2, soit en 4, et ceci de façon équiprobable.
- Le point 4 est « absorbant », c'est-à-dire que, si à l'instant  $n$  le mobile est en 4, il est certain qu'à l'instant  $(n+1)$  il sera encore en 4.

On désigne par  $X_n$  la variable aléatoire égale à l'abscisse de ce mobile à l'instant  $n$ .

1. Justifier que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une chaîne de Markov. Tracer le graphe probabiliste associé et justifier que la

matrice de transition de ce graphe est  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . On note  $M$  cette matrice.

2. On note  $V_n = (P(X_n = 1) \ P(X_n = 2) \ P(X_n = 3) \ P(X_n = 4))$ . Vérifier qu'on a  $V_{n+1} = V_n M$ .

3. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $V_n = V_0 M^n$ .

4. Vérifier que 0 et 1 sont des valeurs propres de  ${}^t M$ , et donner les sous-espaces propres associés.

5. Montrer que la colonne  $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 1 \\ -(2 + \sqrt{3}) \end{pmatrix}$  est vecteur propre de  ${}^t M$  et donner la valeur propre associée.

On admet qu'on a aussi  $\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 1 \\ -(2 - \sqrt{3}) \end{pmatrix} \in E_{-\sqrt{3}/2}({}^t M)$ .

6. En déduire le spectre et les sous-espaces propres de  ${}^t M$ . Déterminer une matrice  $P$  inversible de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ ,

de première ligne  $(1 \ 0 \ 1 \ 1)$ , telle que  ${}^t M = P D P^{-1}$  avec  $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ .

7. Vérifier que  $P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 2 & -\sqrt{3} & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

8. Montrer que  $({}^t M)^n = P D^n P^{-1}$  et expliciter la première colonne de  $({}^t M)^n$  (qui est donc la première ligne de  $M^n$ ).

On distinguera les cas  $n = 0$  et  $n \geq 1$ .

9. Préciser  $V_0$  et en déduire, pour tout entier naturel  $n$ , la loi de  $X_n$ .

On désigne par  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de déplacements nécessaires au mobile pour atteindre le point 4 pour la première fois.

10. Montrer que, pour tout entier  $j$  supérieur ou égal à 3 :

$$(Y = j) = (X_{j-1} = 3) \cap (X_j = 4)$$

puis donner la loi de  $Y$ .

11. Montrer que  $Y$  a une espérance et en déduire que le nombre moyen de déplacements nécessaires au mobile pour atteindre le point 4 pour la première fois est égal à 9.

On désigne par  $Z$  la variable aléatoire égale au nombre de déplacements nécessaires au mobile pour atteindre le point 3 pour la première fois.

12. Pourquoi ne peut-on pas écrire, d'une manière analogue à celle utilisée dans la première question de cette partie, que :  $(Z = j) = (X_{j-1} = 2) \cap (X_j = 3)$  ?
13. Exprimer, pour tout  $j$  de  $\mathbb{N}^*$ , l'événement  $(Z = 2j)$  à l'aide d'événements liés aux variables  $X_0, X_1, \dots, X_{2j}$ . En déduire  $P(Z = 2j)$  pour tout entier naturel  $j$ .
14. Pour tout entier naturel  $j$ , calculer  $P(Z = 2j + 1)$ .
15. En déduire que  $Z$  a une espérance, puis déterminer le nombre moyen de déplacements nécessaires au mobile pour atteindre B pour la première fois.

16. Informatique.

On cherche à modéliser divers phénomènes reliés à cette expérience en Python.

On supposera les imports suivants effectués :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

- (a) Écrire une fonction `etat_suivant(i)` qui prend un argument un entier  $i \in [1, 4]$ , et renvoie l'état du système au rang  $n + 1$  si son état au rang  $n$  est  $i$  (ce résultat est donc aléatoire).
- (b) Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle simule un parcours obéissant aux règles ci-dessus. Le programme prendra en argument un entier non nul  $n$  et renverra la liste  $[X_0, X_1, \dots, X_n]$  de ses positions successives. On prendra soin d'utiliser la question précédente.

```
def parcours(n):
    L = ...
    for k in .... :
        L.append(...)
    return L
```

- (c) Cette fonction étant définie, on tape dans une console :

```
parcours(8)
```

et on obtient une des trois réponses suivantes : laquelle ? (justifier)

- $[1, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 4, 4]$
- $[1, 2, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 4]$
- $[2, 1, 2, 3, 2, 3, 4, 4, 4]$

- (d) Cette fonction est assez maladroite, car 4 est un état absorbant : si une des composantes de la liste est 4, les suivantes le seront automatiquement.  
Écrire une fonction `parcours2` qui renvoie la liste des positions dès que la position 4 est atteinte ; et qui renvoie le même résultat que `parcours` si le 4 n'est pas atteint au cours des  $n$  étapes.  
*Ainsi, si la fonction `parcours` renvoie  $[1, 2, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 4]$ , la fonction `parcours2` doit renvoyer  $[1, 2, 1, 2, 3, 4]$ .*
- (e) Programmer une fonction simulant un tirage de la variable aléatoire  $Y$  (on suppose que le point 4 est atteint presque sûrement à chaque parcours).
- (f) Écrire un code qui renvoie la moyenne de 10 000 tirages successifs de la variable  $Y$ . Que s'attend-on à trouver ?