

Problème DS4 bis  
(fait maison)

①

1) a. | def jeu(p):  
|     score1 = 0  
|     score2 = 0  
|     while abs(score2 - score1) < 2:  
|         if rd.random() < p:  
|             score1 = score1 + 1  
|         else:  
|             score2 = score2 + 1  
|     if score1 > score2:  
|         return 1  
|     return 2.

} Scores initiaux à 0  
// tant qu'il y a moins de  
2 pts d'écart  
} on joue un point

1b. Il suffit de faire tourner la fonction jeu(2/5) un grand nombre de fois, et de regarder la fréquence avec laquelle elle renvoie "1".

```
n = 0
for k in range(10000):
    if jeu(2/5) == 1:
        n = n + 1
print(n / 10000)
```

c) On introduit un compteur de points qu'on renvoie à la fin.

def jeu2(p):

score1 = 0

score2 = 0

n = 0

while abs(score2 - score1) < 2:

if rd.random() < p:

score1 = score1 + 1

else:

score2 = score2 + 1

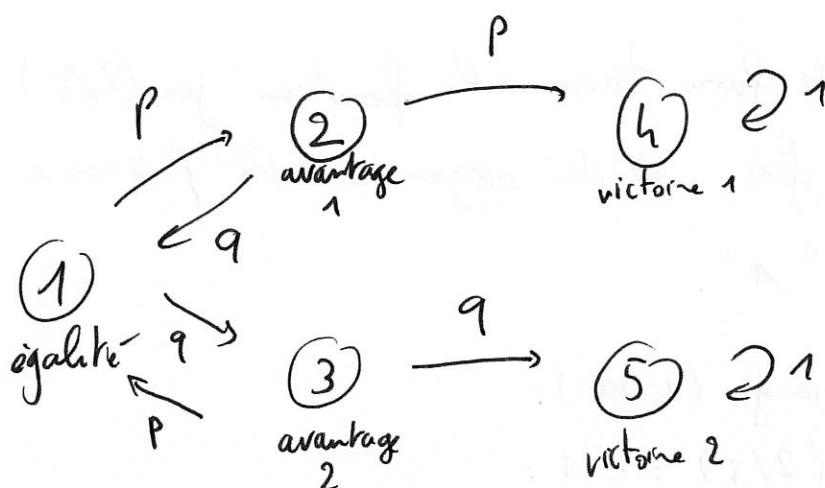
n = n + 1

if score1 > score2:

return 1, n

return 2, n.

2)



3) le coeff (i,j) de  $\Pi$  est le poids de la flèche  $(i) \rightarrow (j)$ :  
on vérifie qu'on a la matrice demandée.

(1<sup>ère</sup> ligne:  $1 \rightarrow 2$  avec proba p,  $1 \rightarrow 3$  avec proba q)  
(4<sup>ème</sup> ligne:  $4 \rightarrow 4$  avec proba 1)

4) On résout, avec  $V = (x \ y \ z \ t \ u) : V\mathbf{A} = V$  (2)

$$\begin{aligned} (\Rightarrow) \quad \begin{cases} x &= qy + pz \\ y &= px \\ z &= qx \\ t &= py + t \\ u &= qz + u \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \quad (\text{avec } p \neq 0) \\ z &= 0 \quad (\text{avec } q \neq 0) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \underline{x=y=z=0}$$

les états stables sont donc les vecteurs  $(0, 0, 0, \alpha, \beta)$

$$\text{avec } \alpha \geq 0$$

$$\beta \geq 0$$

$$\alpha + \beta = 1$$

$$; \text{ donc } \boxed{\begin{aligned} &\text{les vecteurs } (0, 0, 0, \alpha, 1-\alpha) \\ &\text{où } \alpha \in [0, 1] \end{aligned}}$$

les blocs cités sont :  $Q = \begin{pmatrix} 0 & p & q \\ q & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 \end{pmatrix} ; R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$

5) les 2<sup>o</sup> et 3<sup>o</sup> colonnes de  $Q$  sont colinéaires donc  $Q$  n'est pas inversible

On en déduit  $0 \in \mathcal{S}_p(Q)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X \in E_0(Q) \Leftrightarrow \begin{cases} py + qz = 0 \\ qx = 0 \\ px = 0 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} z = -\frac{p}{q}y \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } E_0(Q) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -\frac{p}{q}y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{p}{q} \end{pmatrix} \right) = \underline{\underline{\text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ q \\ -p \end{pmatrix} \right)}}$$

$$\text{On a } Q^2 = \begin{pmatrix} 0 & p & q \\ q & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & p & q \\ q & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2pq & 0 & 0 \\ 0 & pq & q^2 \\ 0 & p^2 & pq \end{pmatrix}$$

$$\text{puis } Q^3 = \begin{pmatrix} 2pq & 0 & 0 \\ 0 & pq & q^2 \\ 0 & p^2 & pq \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & p & q \\ q & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2p^2q & 2pq^2 \\ 2pq^2 & 0 & 0 \\ 2p^2q & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ = 2pq \begin{pmatrix} 0 & p & q \\ q & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{Q^3 = 2pq Q}$$

donc  $X^3 - 2pqX$  est un polynôme annulateur de  $Q$ .

$$X^3 - 2pqX = 0 \Leftrightarrow X(X^2 - 2pq) = 0 \\ \Leftrightarrow X = 0 \text{ ou } X = \pm\sqrt{2pq} \quad ; \text{ donc } \mathcal{S}_p(Q) \subset \{0, \sqrt{2pq}, -\sqrt{2pq}\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{2pq} \text{ et } -\sqrt{2pq} \text{ sont les autres valeurs propres possibles de } Q}$$

7.

$$\begin{pmatrix} 0 & p & q \\ q & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon\sqrt{2pq} \\ q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2pq \\ \varepsilon\sqrt{2pq} \\ \varepsilon\sqrt{2pq} \end{pmatrix} = \varepsilon\sqrt{2pq} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2pq}}{\varepsilon} \\ q \\ p \end{pmatrix}$$

mais Comme  $\varepsilon = \pm 1$ ,  $1/\varepsilon = \varepsilon$

$$\text{donc } \begin{pmatrix} 0 & p & q \\ q & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon\sqrt{2pq} \\ q \\ p \end{pmatrix} = \varepsilon\sqrt{2pq} \begin{pmatrix} \varepsilon\sqrt{2pq} \\ q \\ p \end{pmatrix}$$

(3)

$\begin{pmatrix} \sqrt{2pq} \\ q \\ p \end{pmatrix}$  est non nul, donc est 1 rep par  $\sqrt{2pq}$

$\Rightarrow \sqrt{2pq}$  et  $-\sqrt{2pq}$  sont des valeurs propres de  $Q$ .

la famille  $\left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2pq} \\ q \\ p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2pq} \\ q \\ p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ q \\ -p \end{pmatrix} \right\}$  est une famille de 3 vecteurs

propres de  $Q$  associés à des valeurs propres distinctes: elle est libre et c'est donc une base de  $M_{3,1}(\mathbb{R})$ .

8°)  $Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  s'écrit  $Y = \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$  avec l'écriture par blocs et traduite par l'énoncé.

On en déduit:  $MY = \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} QX \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda X \\ 0 \end{pmatrix}$  (car  $X \in E_\lambda(Q)$ )  
 $= \lambda \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$   
 $\Rightarrow MY = \lambda Y$  et  $\boxed{Y \in E_\lambda(M)}$

9°)  $\dim(E_\lambda(M)) = \dim(\text{Ker}(M - I_5))$

$$M - I_5 = \begin{pmatrix} -1 & p & q & 0 & 0 \\ q & -1 & 0 & p & 0 \\ p & 0 & -1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a 3 premières lignes libres  
 ( $\pm$  échanger) et 2 lignes nulles,  
 donc est de rang 3.

$$\text{Alors } \dim(\text{Ker}(\Pi - I_5)) = \dim(\text{Ker}(f - \text{Id}))$$

où  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5)$  est canoniquement associé à  $M$

$$= 5 - \text{rg}(f - \text{Id})$$

$$= 5 - \text{rg}(\Pi - I_5)$$

$$\boxed{\dim E_1(\Pi) = 2}$$

Si on note  $(C_1, C_2)$  une base de  $E_1(\Pi)$ , la question 8 montre que

$$\left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2pq} \\ q \\ p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2pq} \\ q \\ p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ q \\ -p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C_1, C_2 \right\} \text{ est libre (concaténat de}$$

bases de ss-espaces propres) donc est une base de vecteurs propres de  $M$ .

$M$  est donc diagonalisable

Les valeurs propres respectives associées sont  $\sqrt{2pq}, -\sqrt{2pq}, 0, 1, 1$

Donc si  $P$  est la matrice constituée de 5 colonnes ci-dessus, on a

$$\text{bien } \boxed{M = PDP^{-1} \text{ avec } D = \text{diag}(\sqrt{2pq}, -\sqrt{2pq}, 0, 1, 1)}$$

10. On étudie  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$   
 $p \mapsto p(1-p)$

On a  $f'(p) = 1 - 2p$ , d'où le tableau de variation:

$p$	0	$\frac{1}{2}$	1
$f(p)$	0	$\nearrow \frac{1}{4}$	$\searrow 0$

$$\text{et } \boxed{\forall p \in [0,1], 0 \leq p(1-p) \leq \frac{1}{4}}$$

(4)

11. On a :  $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = P D^n P^{-1}$

$$\text{où } D^n = \begin{pmatrix} (\sqrt{2pq})^n & & & \\ & (-\sqrt{2pq})^n & & \\ & & 0 & \\ (0) & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

D'après 10:  $\forall p \in ]0, 1[$ ,  $2pq = 2p(1-p) \in ]0, \frac{1}{2}[$

donc  $0 < \sqrt{2pq} < 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\pm \sqrt{2pq})^n = 0$ .

$$\text{On en déduit } \lim_{n \rightarrow +\infty} D^n = \begin{pmatrix} 0 & & (0) \\ & 0 & \\ (0) & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{puis, } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} M^n = P \begin{pmatrix} 0 & & (0) \\ & 0 & \\ (0) & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} P^{-1}}$$

12. On procède par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ .

• Au rang, on veut montrer:  $M = \left( \begin{array}{c|c} Q & I_3 R \\ \hline 0 & I_2 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline 0 & I_2 \end{array} \right)$  : c'est vrai par définition de ces blocs.

• Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose  $M^n = \left( \begin{array}{c|c} Q^n & (I_3 + \dots + Q^{n-1})R \\ \hline 0 & I_2 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} Q^n & \sum_{k=0}^{n-1} Q^k R \\ \hline 0 & I_2 \end{array} \right)$

$$\text{Alors: } M^{n+1} = \left( \begin{array}{c|c} Q^n & \sum_{k=0}^{n-1} Q^k R \\ \hline 0 & I_2 \end{array} \right) \times \left( \begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline 0 & I_2 \end{array} \right)$$



$$M^{n+1} = \left( \begin{array}{c|c} Q^n \cdot Q + \left( \sum_{k=0}^n Q^k R \right) \cdot 0 & Q^n R + \left( \sum_{k=0}^n Q^k \cdot R \right) \cdot I_2 \\ \hline 0 \cdot Q + I_2 \cdot 0 & 0 \cdot R + I_2^2 \end{array} \right)$$

$$M^{n+1} = \left( \begin{array}{c|c} Q^{n+1} & \left( \sum_{k=0}^n Q^k \right) R \\ \hline 0 & I_2 \end{array} \right) ; \text{ ce qui établit l'égalité au } y_{n+1}$$

On a bien l'égalité demandée pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

13. D'après la q.7:  $\forall n \in \mathbb{N}^*, Q^n = R \begin{pmatrix} (\sqrt{2pq})^n & 0 & 0 \\ 0 & (-\sqrt{2pq})^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R^{-1}$

où les colonnes de  $R$  sont les vecteurs de la base obtenue en q.7

$$\forall p \in ]0, 1[ \quad 2pq = 2p(1-p) \in ]0, 1/2] \quad \text{d'où} \quad 0 < \sqrt{2pq} < 1$$

$$\text{et donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} (\sqrt{2pq})^n & 0 & 0 \\ 0 & (-\sqrt{2pq})^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_{M_3(\mathbb{R})}$$

$$\text{et donc} \quad \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} Q^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} R \cdot O_{M_3(\mathbb{R})} \cdot R^{-1} = O_{M_3(\mathbb{R})}} \quad \text{avec les propriétés sur les limites admises}$$



(5)

$$\begin{aligned}
 14.) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \left( \sum_{k=0}^{n-1} Q^k \right) (I_3 - Q) \\
 = \sum_{k=0}^{n-1} Q^k - \sum_{k=0}^{n-1} Q^{k+1} \\
 = \sum_{k=0}^{n-1} Q^k - \sum_{k=1}^n Q^k = \boxed{I_3 - Q^n}
 \end{aligned}$$

$$15. \quad I - Q = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -p & -q \\ -q & 1 & 0 \\ -p & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=S}$$

$$\text{donc } (I - Q) \begin{pmatrix} 1 & p & q \\ q & 1-pq & q^2 \\ p & p^2 & 1-pq \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2pq & 0 & 0 \\ 0 & 1-2pq & 0 \\ 0 & 0 & 1-2pq \end{pmatrix} = (1-2pq)I_3$$

$$(I - Q)S = (1 - 2pq)I_3$$

$$\text{donc } (I - Q) \left( \frac{1}{1-2pq} S \right) = I_3$$

$$\Rightarrow \boxed{(I - Q)^{-1} = \frac{1}{1-2pq} \begin{pmatrix} 1 & p & q \\ q & 1-pq & q^2 \\ p & p^2 & 1-pq \end{pmatrix}}$$

$$16. \quad \text{Finalement, } \lim_{n \rightarrow +\infty} M^n = \left( \begin{array}{c|c} \lim_{n \rightarrow +\infty} Q^n & \lim_{n \rightarrow +\infty} (I_3 + \dots + Q^{n-1})R \\ \hline 0 & I_2 \end{array} \right)$$

$$= \left( \begin{array}{c|c} 0 & (I_3 - Q)^{-1}R \\ \hline 0 & I_2 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} 0 & NR \\ \hline 0 & I_2 \end{array} \right)$$

$$\text{avec } (I_3 - Q)^{-1} R = \frac{1}{1-2pq} \begin{pmatrix} p & p & q \\ q & 1-pq & q^2 \\ p & p^2 & 1-pq \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{1-2pq} \begin{pmatrix} p^2 & q^2 \\ p(1-pq) & q^3 \\ p^3 & q(1-pq) \end{pmatrix}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{p^2}{1-2pq} & \frac{q^2}{1-2pq} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{p(1-pq)}{1-2pq} & \frac{q^3}{1-2pq} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{p^3}{1-2pq} & \frac{q(1-pq)}{1-2pq} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

17.  $1_A$  vaut 0 ou 1 donc suit une Loi de Bernoulli.

On a  $P(1_A = 1) = P(A)$  car  $1_A = 1$  ssi  $A$  est réalisée.

Donc  $\boxed{1_A \sim \mathcal{B}(P(A))}$

18.  $1_{(X_k=j)}$  vaut 1 si  $X_k=j$  et 0 sine.

En sommant sur  $k \in \mathbb{N}^*$  :  $1_{(X_k=j)}$  est égal au nombre de  $k \in \mathbb{N}^*$

tels que  $X_k=j$ , ce qui est exactement le nombre de fois où

le "système" passe par l'état  $j$ .

19a. Cours!

6

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = (P(X_{n+1}=1) \dots P(X_{n+1}=5))$$

Soit  $j \in [1, 5]$  : les probabilités totales avec le S.E.E.  $((X_n = i)_{1 \leq i \leq 5})$

$$\begin{aligned} \text{donner } P(X_{n+1}=j) &= \sum_{i=1}^5 P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j) \times P(X_n=i) \\ &= \sum_{i=1}^5 m_{ij} P(X_n=i) \end{aligned}$$

et on reconnaît la  $j$ -ième composante de la matrice ligne  $V_n$

$$(P(X_n=1) \dots) \times \begin{pmatrix} m_{1j} \\ m_{2j} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = V_n \cdot M}$$

On en déduit, par une récurrence immédiate (mais à ébaucher

rapidement sur la copie):  $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, V_n = V_0 M^n}$

19b. Comme la partie commence à 0-0, l'événement  $(X_0=1)$  est certain

$$\text{donc } V_0 = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$$

$$\text{En effectuant le produit matriciel } (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \times \begin{pmatrix} M^k \end{pmatrix}$$

on voit que  $V_k$  est donné par la 1<sup>ère</sup> ligne de  $M^k$

18. Cours !

the  $N$ ,  $V_N = (P(X_{N-1}=1) \dots P(X_{N-2}=2))$

but  $j \in [1, 2]$  : la probabilité totale avec le SFC  $(X_N=j)_{1 \leq j \leq 2}$

donner  $P(X_{N+1}=j) = \sum_{i=1}^2 P(X_N=i) \cdot P(X_{N+1}=j | X_N=i) = P(X_N=j) \times P(X_{N+1}=j)$

$\sum_{i=1}^2 M_{ij} \cdot P(X_N=i)$

ok on remarque la j-ème composante de la matrice ligne  $N$

$$\begin{pmatrix} P(X_{N+1}=1) \\ P(X_{N+1}=2) \\ \vdots \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} P(X_N=1) \\ P(X_N=2) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \text{line } N, V_N = V_{N+1} \cdot P$

On en déduit par une récurrence immédiate (même à échanger)

propriété en la copie:  $\boxed{\text{line } N, V_N = V_N \cdot P}$

19. Comme la proba commune  $\sim 0-0$ ,  $P(X_0=1)$  et autres

dans  $V_0 = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$

En effectuant le produit matriciel  $(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \times$

on voit que  $V_0$  est donné par la 1ère ligne de  $M^k$

On a bien  $P(X_k=j) = (V_k)_j$  ( $j$ -ième composante de  $V_k$ ) (7)

$$\boxed{P(X_k=j) = (\Pi^k)_{1,j}}$$

20.

$E(\mathbb{1}_{(X_k=j)}) = P(X_k=j)$  car  $\mathbb{1}_{(X_k=j)}$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $P(X_k=j)$

donc  $E(\mathbb{1}_{X_k=j}) = (\Pi^k)_{1,j}$

On en reprenant la question 12, on voit que, si  $j \in \mathbb{T}_{1,3\mathbb{J}}$ , le coefficient de  $(\Pi^k)_{1,j}$  est celui de  $\Phi^k$

$$\left( \Pi^k = \begin{array}{c} \xleftarrow{3} \\ \downarrow 3 \\ \left( \begin{array}{c|c} \Phi^k & \dots \\ \hline \dots & \dots \end{array} \right) \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow E(\mathbb{1}_{X_k=j}) = (\Phi^k)_{1,j}$$

Par linéarité de l'espérance

$$E(Y_j) = \sum_{k=0}^{+\infty} E(\mathbb{1}_{X_k=j}) = \sum_{k=0}^{+\infty} (\Phi^k)_{1,j}$$

est le coefficient  $(1,j)$  de  $\sum_{k=0}^{+\infty} \Phi^k = N$

$$\Rightarrow \boxed{E(Y_j) = N_{1,j}}$$

21) le nombre de points joués s'identifie au nombre de déplacements sur le graphe avant d'arriver dans un des deux états (4), (5)

Il suffit donc d'additionner les nombres de passage en (1), (2) et (3) pour l'obtenir.

Par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} E(Y_1 + Y_2 + Y_3) &= E(Y_1) + E(Y_2) + E(Y_3) \\ &= N_{1,1} + N_{1,2} + N_{1,3} \end{aligned}$$

Somme de  
la première ligne  
de N.

D'après l'expression trouvée en question 15 :

$$E(Y_1 + Y_2 + Y_3) = \frac{p+q+1}{1-2pq} \left[ \frac{2}{1-2pq} \right]$$

22) A est l'événement "on arrive en (4) avant d'arriver en (5)"

On considère  $A_k$  l'événement "le joueur 1 gagne en k points"

On part de 0-0 donc  $A_0$  est vide (et  $A_1$  aussi...)

$$A = \bigcup_{k \geq 1} A_k \quad \text{où } A_k \text{ est l'év}^t : (X_0 \leq 3) \cap (X_1 \leq 3) \cap \dots \cap (X_{k-1} \leq 3) \cap (X_k = 4)$$

$$A_k = \left( \bigcap_{i=0}^{k-1} (X_i \leq 3) \right) \cap (X_k = 4)$$

Revenons en fait  $A_k = (X_{k-1} \leq 3) \cap (X_k = 4)$

(8)

\* Si A gagne au point  $k$ , on n'a pas encore gagné au point  $k-1$  (!) donc en  $k-1$  on est dans l'un des deux états 1, 2, 3 : donc  $(X_{k-1} \leq 3)$  ; et A gagne en  $k$  donc  $(X_k = 4)$

$$\text{Ainsi } A_k \subset ((X_{k-1} \leq 3) \cap (X_k = 4))$$

Réciproq<sup>e</sup> si  $(X_{k-1} \leq 3)$  et  $(X_k = 4)$  on n'a pas pu être en 4 avant l'instant  $k$  : le joueur A gagne bien au point  $k$ .

$$\Rightarrow A_k = ((X_{k-1} \leq 3) \cap (X_k = 4))$$

$$\begin{aligned} \text{puis } A &= \bigcup_{k \geq 1} A_k = \bigcup_{k \geq 1} ((X_{k-1} \leq 3) \cap (X_k = 4)) \\ &= \bigcup_{k \geq 0} ((X_k \leq 3) \cap (X_{k+1} = 4)) \quad \text{par décalage d'indice} \end{aligned}$$

23. l'union précédente est disjointe (le point auquel A gagne est défini de manière unique)

$$\text{Donc } P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} (P((X_k \leq 3) \cap (X_{k+1} = 4)))$$

on décompose:  $(X_k \leq 3) \cap (X_{k+1} = 4)$

$$= \bigcup_{i=1}^3 ((X_k = i) \cap (X_{k+1} = 4)) \quad (\text{union disjointe})$$

$$\text{donc } P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \sum_{i=1}^3 P(X_k = i \cap X_{k+1} = 4) \right)$$



$$\begin{aligned}
 \text{Enfin: } P(X_k=i \cap X_{k+1}=4) \\
 &= P(X_k=i) \times P_{(X_k=i)}(X_{k+1}=4) \\
 &= (\Pi^k)_{1,i} \times m_{i,4}
 \end{aligned}$$

$$\text{donc } P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \sum_{i=1}^3 (\Pi^k)_{1,i} m_{i,4} \right)$$

$$\text{or comme } 1 \leq i \leq 3, \bullet (\Pi^k)_{1,i} = (\Phi^k)_{1,i} \quad (\text{cf q. 20})$$

$$\bullet \text{ et } m_{i,4} = R_{i,1}$$

$$\Pi = \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline & \Phi & & & R \\ \hline & 0 & & & I_2 \end{array} \right)$$

$$\text{d'où } P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \sum_{i=1}^3 (\Phi^k)_{1,i} R_{i,1} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (\Phi^k R)_{1,1}$$

en reconnaissant 1 produit matriciel

$$= \left( \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \Phi^k \right) \times R \right)_{1,1}$$

24°)

$$P(A) = (NR)_{1,1}$$

le coefficient (1,1) de NR est

donc coefficient (1,4) de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Pi^n$

(cf question 16)

$$\text{ce qui montre } P(A) = \frac{p^2}{1-2pq} \quad (\text{probab qu'un joueur remporte le jeu})$$