

Devoir surveillé n°4bis
21/01/2022
Durée : 4h

Exercice : Systèmes différentiels

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Le but de cette question est de diagonaliser la matrice A.

(a) Justifier que la matrice A est de rang 1.

(b) En déduire une valeur propre de A ainsi qu'une base du sous-espace propre associé.

(c) Justifier que -6 est valeur propre de A et qu'un vecteur propre associé est $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(d) Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

2. Résoudre le système différentiel :

$$(SH) : \begin{cases} x' &= -x - 2y + z \\ y' &= -2x - 4y + 2z \\ z' &= x + 2y - z \end{cases}$$

3. Quels sont les points d'équilibre de ce système ?

4. Soient $X_1 : t \mapsto X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix}$ et $X_2 : t \mapsto X_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$ deux solutions du système (SH).

On suppose qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ vérifiant $X_1(t_0) = X_2(t_0)$.

Que pouvez-vous dire de X_1 et X_2 ?

5. (a) Déterminer la solution $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ du système (SH) vérifiant $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) Déterminer la solution $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ du système (SH) vérifiant $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

6. On utilise la commande `odeint` du package `scipy.integrate` de Python pour obtenir la solution du système différentiel (SH) avec la condition initiale $X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

On trace les courbes de x , y , z et on obtient un des trois dessins suivants : lequel ? Justifier votre réponse.

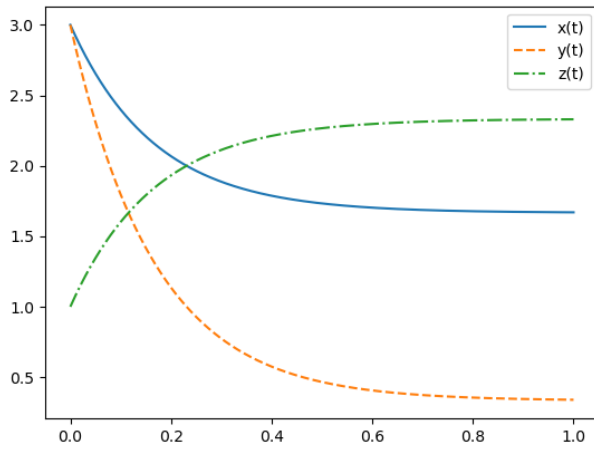


Figure 1

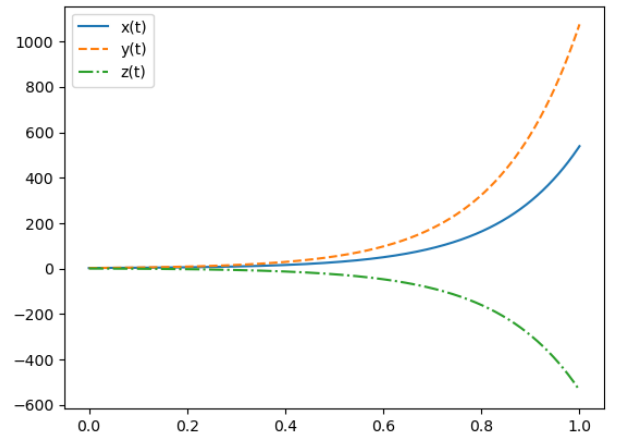


Figure 2

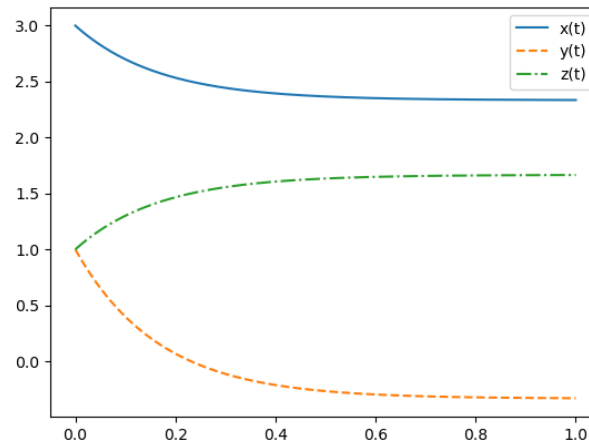


Figure 3

7. Dans cette question on considère trois fonctions continues $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On s'intéresse au système différentiel :

$$(S) : \begin{cases} x' &= -x - 2y + z + a(t) \\ y' &= -2x - 4y + 2z + b(t) , \\ z' &= x + 2y - z + c(t) \end{cases}$$

où x , y et z sont des fonctions de classe \mathcal{C}^1 , inconnues, de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , de la variable réelle t .

Une solution de (S) sur \mathbb{R} est une application $X: t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ où x , y et z sont des fonctions de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que, pour tout t réel, on ait :

$$(S) : \begin{cases} x'(t) &= -x(t) - 2y(t) + z(t) + a(t) \\ y'(t) &= -2x(t) - 4y(t) + 2z(t) + b(t) \\ z'(t) &= x(t) + 2y(t) - z(t) + c(t) \end{cases}$$

- (a) Préciser quel vecteur colonne $B(t) \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dépendant de la variable réelle t permet d'écrire le système (S) sous la forme :

$$X' = AX + B(t).$$

- (b) Soit Y une solution particulière sur \mathbb{R} de (S). Démontrer que $X: t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ est solution de (S) sur \mathbb{R} si et seulement si $Z: t \mapsto X(t) - Y(t)$ est solution de (SH) sur \mathbb{R} , (SH) désignant le système de la question 2.

(c) Dans cette question, on pose pour $t \in \mathbb{R}$: $a(t) = -1$, $b(t) = 2(e^{-t} - 1)$, $c(t) = 1 - e^{-t}$.

Démontrer que $Y : t \mapsto Y(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est solution de (S) sur \mathbb{R} .

En déduire toutes les solutions du système différentiel (S) sur \mathbb{R} .

Problème 2 (Markov vs. Djokovic)

Dans ce problème, on aura à discuter des limites de suites de matrices.

Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on note $A_{i,j}$ son coefficient à la i -ème ligne et la j -ème colonne.

On dit qu'une suite de matrices $(A_n) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ tend vers la matrice B pour $n \rightarrow +\infty$ si, pour tous $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (A_n)_{i,j} = B_{i,j}$ (convergence coefficient par coefficient).

On admet que les règles de calcul suivantes sont valables :

- si $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = A$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = B$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (A_n + B_n) = A + B$;
- si $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = A$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = B$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (A_n B_n) = AB$.

On considère deux joueurs de tennis qui s'affrontent dans un jeu. On simplifie les règles usuelles de la manière suivante : initialement, il y a « égalité » entre les deux joueurs. Le premier joueur qui marque un point prend l'« avantage » . Si ce même joueur marque un second point dans la foulée il gagne le jeu ; si l'autre joueur marque, on revient à égalité.

On se déplace donc entre 5 états :

- égalité (état 1)
- avantage joueur 1 (état 2)
- avantage joueur 2 (état 3)
- victoire joueur 1 (état 4)
- victoire joueur 2 (état 5).

On considère que le joueur 1 gagne un point avec probabilité $p \in]0, 1[$, et le joueur 2 avec probabilité $q = 1 - p$.

1. Modélisation informatique.

On suppose importés dans Python les packages suivants :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

- (a) Compléter la fonction suivante pour qu'elle simule un jeu et renvoie le numéro du joueur gagnant.
On remarquera qu'un joueur gagne dès qu'il a marqué deux points de plus que son adversaire.

```
def jeu(p):
    score1 = ...
    score2 = ...
    while ... :
        if ... :
            score1 = score1+1
        else:
            score2 = score2+1
    if ...
        return 1
    return 2
```

- (b) Proposer un script qui donne une approximation de la probabilité que le joueur 1 gagne le jeu dans le cas $p = \frac{2}{5}$.

- (c) Modifier la fonction jeu pour qu'elle renvoie, en plus du joueur gagnant, le nombre de points joués au cours du jeu.

On suppose que les joueurs ne se fatiguent pas, ce qui justifie qu'on est en présence d'une chaîne de Markov qu'on notera $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n(\Omega) = \llbracket 1, 5 \rrbracket$ et $(X_n = i)$ est l'événement : « après le i -ème point, le score est donné par l'état i » (avec la numérotation ci-dessus).

2. Tracer le graphe probabiliste associé à cette chaîne de Markov.
3. Vérifier que la matrice de transition de cette chaîne est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & p & q & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 & p & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(on expliquera en détail les 1ère et 4ème lignes de M).

4. Déterminer les états stables de cette chaîne.

On adopte une *écriture par blocs* de la matrice M : on voit qu'on a

$$M = \left(\begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline 0 & I_2 \end{array} \right)$$

où $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $R \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, et le bloc 0 est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$; on note $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$. On admet qu'on a alors

$$MX = \begin{pmatrix} QX_1 + RX_2 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

5. Montrer que Q n'est pas inversible. En déduire une valeur propre et un sous-espace propre de Q.

6. Montrer que $Q^3 = 2pqQ$. Quelles sont les autres valeurs propres possibles de Q ?

7. Soit $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Calculer $Q \times \begin{pmatrix} \varepsilon\sqrt{2pq} \\ q \\ p \end{pmatrix}$. En déduire une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de vecteurs propres de Q.

8. Soit $\lambda \in \text{Sp}(Q)$, et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E_\lambda(Q)$. Montrer que $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_\lambda(M)$.

9. Déterminer $\dim(E_1(M))$ et en déduire que M est diagonalisable.

Montrer que $M = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} \sqrt{2pq} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2pq} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et P est une matrice inversible.

10. Montrer : $\forall p \in]0, 1[, 0 \leq p(1-p) \leq \frac{1}{4}$.

11. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} M^n$ en fonction de P et P^{-1} .

On donne maintenant un autre moyen de déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} M^n$.

On admet le principe du *calcul par blocs* : si $(A, B) \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ s'écrivent

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array} \right) \text{ et } B = \left(\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array} \right)$$

alors on a

$$AB = \left(\begin{array}{c|c} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ \hline A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{array} \right)$$

(les blocs étant du même format que ceux de l'écriture par blocs introduite plus haut)

$$12. \text{ Montrer : } \forall n \in \mathbb{N}^*, M^n = \left(\begin{array}{c|c} Q^n & (I_3 + Q + \dots + Q^{n-1})R \\ \hline 0 & I_2 \end{array} \right).$$

$$13. \text{ Montrer : } \lim_{n \rightarrow +\infty} Q^n = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}.$$

$$14. \text{ Montrer : } \forall n \in \mathbb{N}^*, (I_3 + Q + \dots + Q^{n-1})(I_3 - Q) = I_3 - Q^n.$$

On admet qu'on peut conclure de la question précédente que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (I_3 + Q + \dots + Q^{n-1}) = (I_3 - Q)^{-1}$$

$$15. \text{ Calculer } (I - Q) \times \begin{pmatrix} 1 & p & q \\ q & 1 - pq & q^2 \\ p & p^2 & 1 - pq \end{pmatrix}. \text{ En déduire } (I - Q)^{-1}.$$

On note $N = (I - Q)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} Q^k$. On a donc $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

16. Conclure :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M^n = \left(\begin{array}{c|c} 0 & NR \\ \hline 0 & I_2 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{p^2}{1-2pq} & \frac{q^2}{1-2pq} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{p(1-pq)}{1-2pq} & \frac{q^3}{1-2pq} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{p^3}{1-2pq} & \frac{q(1-pq)}{1-2pq} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On s'intéresse maintenant à des quantités donnant le nombre moyen de points joués pour gagner un jeu.

Pour un état $j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, on note Y_j la variable aléatoire mesurant le nombre de passages dans l'état j au cours du jeu (éventuellement infini).

Pour A un événement, on note $\mathbb{1}_A$ l'indicateur de l'événement A : c'est la variable aléatoire définie par $\mathbb{1}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$, et $\mathbb{1}_A(\omega) = 0$ sinon.

17. Montrer que $\mathbb{1}_A \hookrightarrow \mathcal{B}(P(A))$.

18. Montrer que $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{(X_k=j)}$ est une variable aléatoire égale au nombre de passages dans l'état j au cours de la marche.

19. Soit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $V_n = (P(X_n = 1) \dots P(X_n = 5))$ la matrice ligne à 5 éléments contenant la loi de X_n .

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_{n+1} = V_n M$; en déduire $V_n = V_0 M^n$.

(b) Que vaut V_0 ? Montrer : $\forall j \in \llbracket 1, 5 \rrbracket, P(X_k = j) = (M^k)_{1,j}$.

20. Montrer que $E(\mathbb{1}_{(X_k=j)}) = (Q^k)_{1,j}$; en déduire que $E(Y_j) = N_{1,j}$.

(On admettra la convergence des sommes infinies manipulées dans cette question).

21. Montrer que la variable comptant le nombre de points joués est $Y_1 + Y_2 + Y_3$. En déduire son espérance.

On calcule enfin la probabilité qu'a chaque joueur de gagner le jeu.

22. Soit A l'événement : « le joueur 1 gagne le jeu ». Montrer que $A = \bigcup_{k \geq 0} ((X_k \leq 3) \cap (X_{k+1} = 4))$.

23. Montrer que $P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^3 (Q^k)_{1,i} R_{i,1} \right) = (NR)_{1,1}$.

24. En déduire la probabilité que le joueur 1 gagne le jeu.