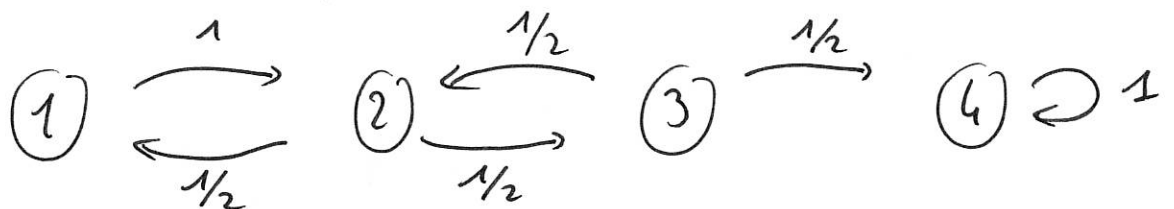


①

DS4  
Problème  
(d'après EDHEC 96S)

1) A chaque instant, la position <sup>succédante</sup> du mobile ne dépend que de sa posit° actuelle: on a bien une chaîne de Markov.

Les règles du voyage permettent de tracer le graphe suivant:



Le coefficient  $(i,j)$  de la matrice de transition étant le poids de la flèche  $(i) \rightarrow (j)$ , on trouve bien:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Montrer  $V_{n+1} = V_n \cdot M$  revient à montrer:

$$\begin{cases} P(X_{n+1}=1) = 1/2 P(X_n=2) \\ P(X_{n+1}=2) = P(X_n=1) + 1/2 P(X_n=3) \\ P(X_{n+1}=3) = 1/2 P(X_n=2) \\ P(X_{n+1}=4) = 1/2 P(X_n=3) + P(X_n=4) \end{cases}$$

On montre par exemple la seconde :

Par formule des probabilités totales avec le système complet

$$(P(X_n = i))_{1 \leq i \leq 4}$$

$$\begin{aligned}
 P(X_{n+1} = 2) &= \left( P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2) \times P(X_n=1) \right) + \left( P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2) \times P(X_n=2) \right) + \left( P_{(X_n=3)}(X_{n+1}=2) \times P(X_n=3) \right) + \left( P_{(X_n=4)}(X_{n+1}=2) \times P(X_n=4) \right) \\
 &= 1 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Les autres cas sont similaires.

On peut aussi procéder plus généralement :

$$\forall j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket, \quad P(X_{n+1} = j) = \sum_{i=1}^4 \underbrace{P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)}_{m_{ij}} \cdot P(X_n = i)$$

$$P(X_{n+1} = j) = \sum_{i=1}^4 m_{ij} P(X_n = i)$$

ce qui se traduit bien matriciellement par  $V_{n+1} = V_n \Pi$

3). Pour  $n=0$ , on a bien  $V_0 = V_0 I_n = V_0 \Pi^0$

Si  $V_n = V_0 \Pi$ , alors  $V_{n+1} = V_n \Pi = V_0 \Pi^n \Pi = V_0 \Pi^{n+1}$

⇒ Par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ , on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_n = V_0 \Pi^n$$

3)  $t_n = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

(2)

On résout  $t_n \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1/2 y = 0 \\ x + 1/2 z = 0 & l_2 \\ 1/2 y = 0 \\ 1/2 z + t = 0 & l_4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -2x & (l_2) \\ t = x & (\text{avec } l_2 - l_4) \end{cases}$

d'où  $E_0(t_n) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \neq \{0\}$  et  $0 \in S_0(t_n)$

On résout aussi  $t_n \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1/2 y = x \\ x + 1/2 z = y \\ 1/2 y = z \\ 1/2 z + t = t \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

d'où  $E_1(t_n) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  et  $1 \in S_0(t_n)$

5)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 1 \\ -(2+\sqrt{3}) \end{pmatrix} \leftarrow \text{noté } X$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 3/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 1/2 - 2 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } {}^t\pi X = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 3/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ -3/2 - \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 1 \\ -\sqrt{3} - 2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2} X$$

$$\boxed{X \text{ étant non nulle, } \frac{\sqrt{3}}{2} \in \mathcal{S}_p({}^t\pi) \text{ et } X \in E_{\sqrt{3}/2}({}^t\pi)}$$

6. On a les 4 valeurs propres  $0, 1, \pm \sqrt{3}/2$ .  ${}^t\pi \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  donc on sait qu'il n'y en a pas d'autres :  $\boxed{\mathcal{S}_p({}^t\pi) = \{0, 1, \sqrt{3}/2, -\sqrt{3}/2\}}$

De plus,  $\pi \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ , admet 4 rap donc tous les sous-espaces propres sont de dimension 1.

On en déduit  $E_{\sqrt{3}/2}({}^t\pi) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 1 \\ -(2+\sqrt{3}) \end{pmatrix} \right)$ , et idem pour  $E_{-\sqrt{3}/2}$ .

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -(2+\sqrt{3}) & -(2-\sqrt{3}) \end{pmatrix}$$

vérifier la contrainte demandée

(inversible car ses colonnes sont des vecteurs propres de  ${}^tP$  associés à des valeurs propres distinctes).

On peut calculer  $P \times \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \\ 2\sqrt{3} & \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 2 & -\sqrt{3} & 1 & 0 \end{pmatrix}}_Q$ ; on trouve  $6I_4$

$$PQ = 6I_4 \text{ donc } P\left(\frac{1}{6}Q\right) = I_4 \Rightarrow \boxed{P^{-1} = \frac{1}{6}Q}.$$

8) Une récurrence immédiate montre  $({}^tP)^n = PD^nP^{-1}$ .

On calcule le produit matriciel :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} PD^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2-\sqrt{3} & -2+\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\sqrt{3}/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-\sqrt{3}/2)^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & (\sqrt{3}/2)^n & (-\sqrt{3}/2)^n \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \cdot (\sqrt{3}/2)^n & -\sqrt{3} \cdot (-\sqrt{3}/2)^n \\ 0 & 0 & (\sqrt{3}/2)^n & (-\sqrt{3}/2)^n \\ 0 & 1 & (-2-\sqrt{3})(\sqrt{3}/2)^n & (-2+\sqrt{3})(-\sqrt{3}/2)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et  $(t_n)^n = P D^n P^{-1}$

$$= \frac{1}{6} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n & \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n & -\sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \\ 0 & 0 & \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n & \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \\ 0 & 1 & (-2-\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n & (-2+\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 2 & -\sqrt{3} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n & - & - & - \\ 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n - 2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n & - & - & - \\ 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n & - & - & - \\ 6 + \frac{2}{3}(-2-\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + 2(-2+\sqrt{3})\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n & - & - & - \end{pmatrix}$$

d'où la première colonne:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \left( \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \right) \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \right) \\ \frac{1}{3} \left( \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \right) \\ 1 - \frac{1}{3}(2+\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + \frac{1}{3}(\sqrt{3}-2)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

[ par  $n=0$ ,  $(t_n)^n = I_4$ , de première colonne  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  ]

9.  $V_0 = (P(X_0=1) \quad P(X_0=2) \quad P(X_0=3) \quad P(X_0=4))$  (4)  
 $= (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$  car le mobile part du point 1.

On a alors:  $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = V_0 M^n$   
 $= (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \times \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$

donc on voit que  $V_n$  est la première ligne de  $M^n$

$\Rightarrow$  la loi de  $X_n$  est donnée par la colonne de  $(M)^n$  transposée à la question précédente.

10) Soit  $j \geq 3$ .  $(Y=j)$  est l'événement: "on est pour la première fois au point 4 après  $j$  déplacements"

si  $Y=j$  alors  $X_j=4$ ; et comme on n'était pas en "4" au temps  $j-1$  on a forcément  $X_{j-1}=3$  (on ne peut pas sauter de 1 en 4, ou de 2 en 4...)

d'où:  $(Y=j) \subset (X_{j-1}=3) \cap (X_j=4)$

Réciproquement, si  $X_{j-1}=3$  et  $X_j=4$ , on est en 4 au tps  $j$ , et pour la première fois car on n'y était pas au temps  $j-1$ .

d'où  $(Y=j) \supset (X_{j-1}=3) \cap (X_j=4)$  et donc l'égalité recherchée



Enfin on a  $Y(\omega) = \mathbb{N}_3, +\infty$  car il faut au moins 3 sauts pour arriver en 4.

$$\begin{aligned} \forall j \in \mathbb{N}_3, +\infty : P(Y=j) &= P((X_{j-1}=3) \cap (X_j=4)) \\ &= P_{(X_{j-1}=3)}(X_j=4) \times P(X_{j-1}=3) \\ &= \frac{1}{2} P(X_{j-1}=3) \end{aligned}$$

$$P(Y=j) = \frac{1}{6} \left( \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^j + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^j \right) \text{ d'après 9°)$$

11) On étudie la cv absolue de  $\sum_{j \geq 3} j P(Y=j)$

$$\underbrace{|j P(Y=j)|}_{\geq 0} = \frac{1}{6} \left( j \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^j + j \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^j \right); \text{ car } \sqrt{3} < 2 \text{ donc } \left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right| < 1 \text{ et } \left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right| < 1$$

donc la série de terme général  $j \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^j$  cv absolument

et  $E(Y)$  existe.

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{j=3}^{+\infty} \frac{1}{6} \left( j \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^j + j \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^j \right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{j=3}^{+\infty} j \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{j-1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{j=3}^{+\infty} j \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{j-1} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12} \left( \frac{1}{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \left( \frac{1}{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12} \left( \frac{1}{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - 2\sqrt{3} \right) = \dots \end{aligned}$$