

Devoir surveillé n°5

11/02/2023

Durée : 4h

Exercice 1

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}.$$

- (a) Étudier les variations de la fonction g_0 , définie sur $[0, +\infty[$ par : $g_0(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$.
Préciser la limite de g_0 en $+\infty$, donner l'équation de la tangente en 0, et donner l'allure de la courbe représentative de g_0 .
- (b) Pour $n \geq 1$, justifier que g_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et montrer que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad g'_n(x) \geq 0 \iff n \geq 2\ln(1+x).$$

En déduire les variations de la fonction g_n lorsque $n \geq 1$.

Calculer soigneusement $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x)$.

- (c) Montrer que, pour $n \geq 1$, g_n admet un maximum sur $[0, +\infty[$ qui vaut :

$$M_n = \left(\frac{n}{2e}\right)^n$$

et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n$.

- (d) Montrer enfin que pour tout $n \geq 1$:

$$g_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{+\infty} g_n(x) dx.$$

- (a) Montrer que l'intégrale I_0 est convergente et la calculer.
- (b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, l'intégrale I_n est convergente.
- (c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = (n+1)I_n$$

- (d) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = n!$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{n!} g_n(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une densité de probabilité.

On considère à présent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n une variable aléatoire réelle admettant f_n pour densité.

On notera F_n la fonction de répartition de X_n .

- (b) La variable aléatoire X_n admet-elle une espérance ?
- (c) Que vaut $F_n(x)$ pour $x < 0$ et $n \in \mathbb{N}$?

- (d) Calculer $F_0(x)$ pour $x \geq 0$.
 (e) Soit $x \geq 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$F_k(x) = -\frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} + F_{k-1}(x)$$

- (f) En déduire : $\forall x \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, F_n(x) = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{\ln(1+x)^k}{1+x}$.
 (g) Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, déterminer la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

Partie I. Étude d'une fonction f .

On considère la fonction définie sur l'ensemble des réels positifs par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. Écrire le développement limité de $f(x)$ à l'ordre 1, au voisinage de 0. En déduire que f est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Déduire du même développement limité que f est dérivable en 0, et donner la valeur de $f'(0)$.
3. Justifier la dérivabilité de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$ puis déterminer la fonction φ telle que :

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2}$$

4. Étudier les variations de φ . En déduire le tableau de variation de f qui sera complété par la limite de f en $+\infty$.

Partie II. Étude d'une suite.

On introduit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \int_0^n \frac{e^{-\frac{u}{n}}}{1+u} du$$

5. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n \geq \frac{1}{e} \ln(n+1)$$

Donner la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

6. Prouver l'existence de l'intégrale $\int_0^1 f(x) dx$.

7. Montrer : $\forall x \in [0, 1], n \frac{1-e^{-x}}{1+nx} \leq f(x)$.

8. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$0 \leq \int_0^n \frac{1}{1+u} du - u_n \leq \int_0^1 f(x) dx$$

9. Donner alors un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3 : Étude d'un temps d'attente

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une réunion est prévue entre n invités que l'on note I_1, I_2, \dots, I_n . Chaque invité arrivera entre l'instant 0 et l'instant 1.

Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on modélise l'instant d'arrivée de l'invité I_k par une variable aléatoire T_k de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. On suppose de plus que, pour tout réel t , les n événements

$$(T_1 \leq t), (T_2 \leq t), \dots, (T_n \leq t)$$

sont indépendants.

On notera F la fonction de répartition de la loi $\mathcal{U}([0, 1])$, et f une densité de cette même loi.

1. Donner l'expression de $F(x)$ et $f(x)$ pour tout réel x .
2. Soit un réel t appartenant à $[0, 1]$. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on note B_k la variable aléatoire de Bernoulli prenant la valeur 1 si l'événement $(T_k \leq t)$ est réalisé et la valeur 0 sinon. On admet que les conditions de l'expérience permettent de supposer les B_k indépendantes.

On note $S_t = B_1 + B_2 + \dots + B_n$.

- (a) Que modélise la variable aléatoire S_t ?
 - (b) Pour tout $k \in [1, n]$, déterminer la loi de la variable B_k .
 - (c) En déduire la loi de la variable aléatoire S_t .
3. Soit R_1 la variable aléatoire égale à l'instant de la première arrivée.
 - (a) Que vaut $R_1(\Omega)$?
 - (b) Soit un réel t appartenant à $[0, 1]$. Comparer l'événement $(R_1 > t)$ et l'événement $(S_t = 0)$.
 - (c) Déterminer la fonction de répartition de R_1 (qu'on notera F_1).
Montrer que la variable aléatoire R_1 admet une densité et en déterminer une.
 4. Soit R_2 la variable aléatoire égale à l'instant de la deuxième arrivée.
Montrer que la variable aléatoire R_2 admet une densité et en déterminer une.

5. Informatique.

Dans les codes qui suivent on supposera que les imports usuels suivants ont été réalisés :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
```

- (a) Écrire un programme renvoyant la valeur minimale d'une liste L .
- (b) Compléter le programme suivant qui prend en argument une liste (ou un `np.array`) L de longueur $n \geq 2$ et renvoie le «second plus petit élément» de L (c'est-à-dire le second élément de la liste qu'on obtiendrait en triant les éléments de L par ordre croissant).
Par exemple cette fonction renverra 3 pour la liste $[0, 4, 3, 5, 17, 4]$; et 1 pour la liste $[1, 2, 4, 3, 1]$.

```

def second_plus_petit(L):
    """ au cours de l'exécution de ce code,
    m1 sera la plus petite valeur rencontrée,
    et m2 la seconde plus petite """
    if L[0]<L[1]:
        m1 = ... # min
        m2 = ... # second min
    else:
        m1 = ...
        m2 = ...
    for k in range(2, len(L)):
        if L[k] < m1:
            m2 = ...
            m1 = ...
        elif ... : #nouveau second min
            m2 = L[k]
    return m2

```

- (c) On rappelle que `rd.random(n)` renvoie un `np.array` à `n` éléments dont les composantes sont des tirages de variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{U}([0, 1])$.
 Utiliser la fonction codée dans la question précédente pour générer un tirage aléatoire de R_2 .