

Devoir surveillé n°5
11/02/2023
Durée : 4h

Exercice 1

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}.$$

- (a) Étudier les variations de la fonction g_0 , définie sur $[0, +\infty[$ par : $g_0(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$.

Préciser la limite de g_0 en $+\infty$, donner l'équation de la tangente en 0, et donner l'allure de la courbe représentative de g_0 .

g_0 est dérivable sur \mathbb{R}_+ (composée de fonctions usuelles de dénominateur non nul) ; $\forall x \geq 0$, $g'_0(x) = -\frac{2}{(1+x)^3} < 0$ donc g_0 est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+ .

Avec $g_0(0) = 1$ et $g'_0(0) = -2$ on trouve l'équation de la tangente en 0 : $y = -2x + 1$.

On obtient la courbe suivante :

- (b) Pour $n \geq 1$, justifier que g_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et montrer que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad g'_n(x) \geq 0 \iff n \geq 2\ln(1+x).$$

En déduire les variations de la fonction g_n lorsque $n \geq 1$.

Calculer soigneusement $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x)$.

Par les mêmes arguments que dans la question précédente, g_n est dérivable sur \mathbb{R}_+ .

$$\forall x \geq 0, \quad g'_n(x) = \frac{\frac{n}{1+x} \ln(1+x)^{n-1} (1+x)^2 - 2(1+x) \ln(1+x)^n}{(1+x)^4} = \frac{\ln(1+x)^{n-1} (n - 2\ln(1+x))}{(1+x)^3}$$

Sur \mathbb{R}_+ , $\ln(1+x)$ et $(1+x)^3$ sont positifs donc le signe de $g'_n(x)$ est celui de $n - 2\ln(1+x)$ ce qui donne bien $g'_n(x) \geq 0 \iff n \geq 2\ln(1+x)$.

En travaillant sur cette inégalité :

$$g'_n(x) \geq 0 \iff n \geq 2\ln(1+x) \iff 1+x \leq e^{n/2} \iff x \leq e^{n/2} - 1$$

(on a utilisé la stricte croissance de exp pour la seconde équivalence).

On en déduit que g_n est croissante sur $[0, e^{n/2} - 1]$ et décroissante sur $[e^{n/2} - 1, +\infty[$.

En posant $X = 1 + x$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(X))^n}{X^2} = 0$ par croissance comparée usuelle.

(c) **Montrer que, pour $n \geq 1$, g_n admet un maximum sur $[0, +\infty[$ qui vaut :**

$$M_n = \left(\frac{n}{2e}\right)^n$$

et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n$.

D'après les variations ci-dessus, g_n atteint son maximum en $x = e^{n/2} - 1$; de plus

$$M_n = g_n(e^{n/2} - 1) = \frac{\ln(1 + e^{n/2} - 1)^n}{(1 + e^{n/2} - 1)^2} = \frac{\ln(e^{n/2})^n}{(e^{n/2})^2} = \frac{(n/2)^n}{e^n} = \left(\frac{n}{2e}\right)^n$$

Avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2e} = +\infty$ on a sans forme indéterminée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = +\infty$.

(d) **Montrer enfin que pour tout $n \geq 1$:**

$$g_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} g_n(x)$:

$$x^{3/2} g_n(x) = \frac{x^{3/2}}{(1+x)^2} \ln(1+x)^n \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^{3/2}}{x^2} \ln(1+x)^n = \frac{\ln(1+x)^n}{\sqrt{x}}$$
 et ce dernier équivalent tend vers 0

par croissances comparées ; ce qui donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} g_n(x) = 0$ et donc $g_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$.

2. **On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:**

$$I_n = \int_0^{+\infty} g_n(t) dt.$$

(a) **Montrer que l'intégrale I_0 est convergente et la calculer.**

$$I_0 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^2} dt.$$

Soit $A \geq 0$: on a

$$\int_0^A \frac{1}{(1+t)^2} dt = \left[-\frac{1}{1+t} \right]_0^A = 1 - \frac{1}{1+A} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1$$

donc I_0 converge, et $I_0 = 1$.

(b) **Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, l'intégrale I_n est convergente.**

$$I_n = \int_0^{+\infty} g_n(t) dt. \text{ La fonction } g_n \text{ est continue sur } [0, +\infty[; \text{ de plus on a vu que } g_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right).$$

Par critère de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx$ converge, donc par comparaison de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} g_n(t) dt$ converge et donc $I_n = \int_0^{+\infty} g_n(t) dt$ converge également.

(c) **À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :**

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = (n+1)I_n$$

On se place sur $[0, A]$ avec $A \geq 0$.

$$\int_0^A g_{n+1}(t) dt = \int_0^A \frac{\ln(1+t)^{n+1}}{(1+t)^2} dt$$

On peut dériver $t \mapsto \ln(1+t)^{n+1}$ en $t \mapsto (n+1) \frac{1}{1+t} \ln(1+t)^n$; et intégrer $t \mapsto \frac{1}{(1+t)^2}$ en $t \mapsto -\frac{1}{1+t}$.

Toutes ces fonctions sont \mathcal{C}^1 donc l'IPP est légitime ; et on a

$$\begin{aligned}\int_0^A \frac{(\ln(1+t))^{n+1}}{(1+t)^2} dt &= \left[-\frac{1}{1+t} \ln(1+t)^{n+1} \right]_0^A + \int_0^A \frac{1}{1+t} (n+1) \frac{1}{1+t} (\ln(1+t))^n dt \\ &= -\frac{\ln(1+A)^{n+1}}{1+A} + (n+1) \int_0^A \frac{(\ln(1+t))^n}{(1+t)^2} dt\end{aligned}$$

En faisant tendre $A \rightarrow +\infty$, $\frac{\ln(1+A)^{n+1}}{1+A} \rightarrow 0$ et on obtient bien

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\ln(1+t))^{n+1}}{(1+t)^2} dt = (n+1) \int_0^{+\infty} \frac{(\ln(1+t))^n}{(1+t)^2} dt$$

ce qui est l'égalité demandée.

(d) **En déduire que :**

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = n!$$

C'est évidemment une récurrence.

- $I_0 = 1 = 0!$ (vu en question 2a)
- Si $I_n = n!$, alors $I_{n+1} = (n+1)I_n = (n+1)n! = (n+1)!$; d'où l'hérédité.

La propriété est bien établie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. **Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par :**

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{n!} g_n(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(a) **Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une densité de probabilité.**

3 propriétés :

- $0 \geq 0$, g_n est positive sur \mathbb{R}_+ donc $\frac{1}{n!} g_n(x) \geq 0$ sur \mathbb{R}_+ ; ainsi f_n est positive sur \mathbb{R} .
- g_n étant continue sur \mathbb{R}_+ , f_n est continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} g_n(x) dx = \frac{I_n}{n!} = 1$

f_n est donc bien une densité de probabilité.

On considère à présent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n une variable aléatoire réelle admettant f_n pour densité.

On notera F_n la fonction de répartition de X_n .

(b) **La variable aléatoire X_n admet-elle une espérance ?**

On examine la convergence absolue de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x) dx$ donc la convergence de $\int_0^{+\infty} x g_n(x) dx$ (la quantité à intégrer étant positive sur $[0, +\infty[$ on peut omettre la valeur absolue).

On a l'équivalent :

$$x g_n(x) = \frac{x}{(1+x)^2} \ln(1+x)^n \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(1+x)^n}{x}$$

et pour $x \geq 2$, $\frac{\ln(1+x)^n}{x} \geq \frac{1}{x} \geq 0$.

Ainsi, l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{\ln(1+x)^n}{x} dx$ diverge par comparaison à une intégrale de Riemann divergente

; et par équivalence de fonctions positives $\int_2^{+\infty} x g_n(x) dx$ diverge, et donc $\int_0^{+\infty} x g_n(x) dx$ aussi.

Ainsi, X_n n'admet pas d'espérance.

(c) **Que vaut $F_n(x)$ pour $x < 0$ et $n \in \mathbb{N}$?**

On sait que $F_n(x) = \int_{-\infty}^x f_n(t) dt$.

So $x < 0$, f_n est nulle sur $]-\infty, x]$ et donc $F_n(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$.

(d) **Calculer $F_0(x)$ pour $x \geq 0$.**

$$F_0(x) = \int_{-\infty}^x f_0(t) dt = \int_0^x g_0(t) dt = \left[-\frac{1}{1+t} \right]_0^x = 1 - \frac{1}{1+x}.$$

(e) **Soit $x \geq 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :**

$$F_k(x) = -\frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} + F_{k-1}(x)$$

C'est une IPP similaire à celle de la question 2c.

$$\begin{aligned} F_k(x) &= \int_{-\infty}^x f_k(t) dt = \frac{1}{k!} \int_0^x \frac{\ln(1+t)^k}{(1+t)^2} dt \\ &= \frac{1}{k!} \left(\left[-\frac{1}{1+t} \ln(1+t)^k \right]_0^x + \int_0^x \frac{1}{1+t} k \frac{1}{1+t} (\ln(1+t))^{k-1} dt \right) \\ &= -\frac{1}{k!} \frac{\ln(1+x)^k}{1+x} + \frac{k}{k!} \int_0^x \frac{(\ln(1+t))^{k-1}}{(1+t)^2} dt \\ &= -\frac{1}{k!} \frac{\ln(1+x)^k}{1+x} + \frac{1}{(k-1)!} \int_0^x \frac{(\ln(1+t))^{k-1}}{(1+t)^2} dt \end{aligned}$$

et on reconnaît bien

$$F_k(x) = -\frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} + F_{k-1}(x)$$

(f) **En déduire :** $\forall x \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, F_n(x) = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{\ln(1+x)^k}{1+x}.$

On peut procéder par récurrence ; ou faire un télescope : la question précédente montre que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}$$

et on peut sommer cela de $k = 1$ à n (avec $n \geq 1$) :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (F_k(x) - F_{k-1}(x)) &= -\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} \\ F_n(x) - F_0(x) &= -\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} \\ F_n(x) &= F_0(x) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} \end{aligned}$$

Or $F_0(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$ et on reconnaît dans cette seconde partie le terme $k = 0$ de la somme : donc

$$F_n(x) = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}$$

Enfin pour $n = 0$ on cherche à montrer $F_0(x) = 1 - \sum_{k=0}^0 \frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$ ce qui est bel et bien vérifié.

(g) Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, déterminer la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Pour $x < 0$, $F_n(x) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Pour $x \geq 0$, on reconnaît une série exponentielle !

$$F_n(x) = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{1+x} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\ln(1+x))^k}{k!} = 1 - \frac{1}{1+x} \exp(\ln(1+x)) = 1 - \frac{1+x}{1+x} = 0$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 0$$

Exercice 2

Partie I. Étude d'une fonction f .

On considère la fonction définie sur l'ensemble des réels positifs par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. Écrire le développement limité de $f(x)$ à l'ordre 1, au voisinage de 0. En déduire que f est continue sur $[0, +\infty[$.

Pour $x \rightarrow 0$ on a aussi $-x \rightarrow 0$, et donc

$$e^{-x} = 1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2} + o((-x)^2) = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

ce qui donne $f(x) = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$ au voisinage de 0.

f est continue sur $]0, +\infty[$ comme composée de fonctions continues ; et de plus avec le DL précédent $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$ ce qui donne la continuité en 0.

Finalement f est bien continue sur $[0, +\infty[$.

2. Déduire du même développement limité que f est dérivable en 0, et donner la valeur de $f'(0)$.

Le taux de variation en 0 s'écrit

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1 - \frac{x}{2} + o(x) - 1}{x} = -\frac{1}{2} + o(1)$$

$$\text{et donc } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\frac{1}{2}.$$

3. Justifier la dérivabilité de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$ puis déterminer la fonction φ telle que :

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2}$$

Sur $]0, +\infty[$, f est dérivable comme composée de fonctions dérivables sur leurs ensembles de définition.

Le calcul de la dérivée donne :

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{e^{-x} \times x - (1 - e^{-x}) \times 1}{x^2} = \frac{(1+x)e^{-x} - 1}{x^2}$$

ce qui donne $\varphi(x) = (1+x)e^{-x} - 1$.

4. **Étudier les variations de φ . En déduire le tableau de variation de f qui sera complété par la limite de f en $+\infty$.**

Cette fonction φ est à son tour dérivable sur \mathbb{R}_+ ; et

$$\forall x \geq 0, \varphi'(x) = e^{-x} + (1+x)(-e^{-x}) = -xe^{-x} \leq 0$$

donc φ est décroissante sur \mathbb{R}_+ .

Comme $\varphi(0) = 0$, on en déduit que φ est négative sur \mathbb{R}_+ ; ainsi $f'(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2}$ est négative pour tout $x > 0$ (car le dénominateur x^2 est > 0). De plus $f'(0) = -\frac{1}{2} \leq 0$; de sorte que finalement :

f est décroissante sur \mathbb{R}_+ .

En $+\infty$, $e^{-x} \rightarrow 0$ et $x \rightarrow +\infty$ donc $f(x) \rightarrow 0$ par quotient.

x	0	$+\infty$
$f(x)$	1	0

Partie II. Étude d'une suite.

On introduit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \int_0^n \frac{e^{-\frac{u}{n}}}{1+u} du$$

5. **Démontrer que pour tout entier naturel n non nul :**

$$u_n \geq \frac{1}{e} \ln(n+1)$$

Donner la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Il s'agit de minorer la fonction à intégrer.

Soit $n > 0$. On a :

$$\begin{aligned} \forall u \in [0, n], 0 \leq u \leq n \\ \Rightarrow -1 \leq -\frac{u}{n} \leq 0 \\ \Rightarrow e^{-1} \leq e^{-u/n} \leq 1 \\ \Rightarrow \frac{e^{-1}}{1+u} \leq \frac{e^{-u/n}}{1+u} \leq \frac{1}{1+u} \quad \text{en divisant par } 1+u > 0 \end{aligned}$$

et on obtient en particulier :

$$\forall u \in [0, n], \frac{e^{-u/n}}{1+u} \geq \frac{e^{-1}}{1+u}$$

d'où en intégrant sur $[0, n]$:

$$\int_0^n \frac{e^{-u/n}}{1+u} du \geq \int_0^n \frac{e^{-1}}{1+u} du = e^{-1} \int_0^n \frac{1}{1+u} du = e^{-1} \left[\ln(1+u) \right]_0^n = e^{-1} \ln(n+1)$$

ce qui donne le résultat voulu.

6. **Prouver l'existence de l'intégrale $\int_0^1 f(x) dx$.**

D'après la question 1, f est continue sur $[0, 1]$ (**crochets fermés !**) donc $\int_0^1 f(x) dx$ est bien définie.

7. **Montrer :** $\forall x \in [0, 1], n \frac{1 - e^{-x}}{1 + nx} \leq f(x)$.

Pour $x \in]0, 1]$ on utilise l'expression de $f(x)$: $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x}$.

Avec $1 + nx \geq nx$ on a :

$$\forall x \in]0, 1], n \frac{1 - e^{-x}}{1 + nx} \leq n \frac{1 - e^{-x}}{nx} = \frac{1 - e^{-x}}{x} = f(x)$$

Pour $x = 0$: $n \frac{1 - e^{-0}}{1 + n \times 0} = 0$ et $f(0) = 1$; $0 \leq 1$ donc l'inégalité est encore vraie.

8. **Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :**

$$0 \leq \int_0^n \frac{1}{1+u} du - u_n \leq \int_0^1 f(x) dx$$

Examinons le terme central de cet encadrement :

$$\int_0^n \frac{1}{1+u} du - u_n = \int_0^n \frac{1}{1+u} du - \int_0^n \frac{e^{-u/n}}{1+u} du = \int_0^n \frac{1 - e^{-u/n}}{1+u} du$$

Comme $u \geq 0$ sur le domaine d'intégration, on a $e^{-u/n} \leq 1$; et donc $\forall u \in [0, n], \frac{1 - e^{-u/n}}{1+u} \geq 0$.
D'où par positivité de l'intégrale (les bornes sont bien dans l'ordre croissant) :

$$\int_0^n \frac{1}{1+u} du - u_n = \int_0^n \frac{1 - e^{-u/n}}{1+u} du \geq 0$$

On pose maintenant $x = \frac{u}{n}$ dans l'intégrale. Alors $u = nx$ et $du = n dx$.

$$\int_0^n \frac{1}{1+u} du - u_n = \int_0^n \frac{1 - e^{-x/n}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{1+nx} n dx = \int_0^1 n \frac{1 - e^{-x}}{1+nx} dx$$

On reconnaît dans cette dernière quantité le majorant de la question précédente. Comme :

$$\forall x \in [0, 1], n \frac{1 - e^{-x}}{1+nx} \leq f(x)$$

on a en intégrant sur $[0, 1]$:

$$\int_0^1 n \frac{1 - e^{-x}}{1+nx} dx \leq \int_0^1 f(x) dx$$

On a donc finalement montré :

$$\int_0^n \frac{1}{1+u} du - u_n = n \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{1+nx} dx \leq \int_0^1 f(x) dx$$

ce qui donne l'autre inégalité de l'encadrement.

9. **Donner alors un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.**

En calculant l'intégrale, l'encadrement montré dans la question précédente s'écrit :

$$0 \leq \ln(1+n) - u_n \leq \int_0^1 f(x) dx = I$$

On note $I = \int_0^1 f(x) dx$: I est un nombre constant !

On divise alors cet encadrement par $\ln(n+1)$ (> 0 dès que $n \geq 1$) :

$$\forall n \geq 1, 0 \leq 1 - \frac{u_n}{\ln(1+n)} \leq \frac{I}{\ln(1+n)}$$

et on voit par le théorème des gendarmes que

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{u_n}{\ln(1+n)} = 0$; ce qui s'écrit aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\ln(1+n)} = 1$; et donc finalement

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$$

(dernier équivalent à démontrer par vos soins...)

Exercice 3 : Étude d'un temps d'attente

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une réunion est prévue entre n invités que l'on note I_1, I_2, \dots, I_n .

Chaque invité arrivera entre l'instant 0 et l'instant 1.

Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on modélise l'instant d'arrivée de l'invité I_k par une variable aléatoire T_k de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. On suppose de plus que, pour tout réel t , les n événements

$$(T_1 \leq t), (T_2 \leq t), \dots, (T_n \leq t)$$

sont indépendants.

On notera F la fonction de répartition de la loi $\mathcal{U}([0, 1])$, et f une densité de cette même loi.

- Donner l'expression de $F(x)$ et $f(x)$ pour tout réel x .
- Soit un réel t appartenant à $[0, 1]$. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on note B_k la variable aléatoire de Bernoulli prenant la valeur 1 si l'événement $(T_k \leq t)$ est réalisé et la valeur 0 sinon. On admet que les conditions de l'expérience permettent de supposer les B_k indépendantes.

On note $S_t = B_1 + B_2 + \dots + B_n$.

- Que modélise la variable aléatoire S_t ?

Pour tout k , B_k vaut 1 si l'invité est là à l'instant t , et 0 s'il n'est pas encore arrivé. S_t compte donc le nombre d'invités que sont déjà arrivés à l'instant t .

- Pour tout $k \in [1, n]$, déterminer la loi de la variable B_k .

Pour tout $k \in [1, n]$, B_k est une variable de Bernoulli car à valeurs dans $\{0, 1\}$; de plus $P(B_k = 1) = P(T_k \leq t) = t$, car $T_k \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$ et $t \in [0, 1]$ (expression de la fonction de répartition d'une var suivant $\mathcal{U}([0, 1])$).

- En déduire la loi de la variable aléatoire S_t .

S_t est une somme de variables de Bernoulli indépendantes, qui sont, d'après ce qui précède, de même paramètre t . On en déduit que $S_t \hookrightarrow \mathcal{B}(n, t)$.

- Soit R_1 la variable aléatoire égale à l'instant de la première arrivée.

- Que vaut $R_1(\Omega)$?

- Soit un réel t appartenant à $[0, 1]$. Comparer l'événement $(R_1 > t)$ et l'événement $(S_t = 0)$.

On a $R_1 > t$ ssi le premier invité arrive strictement après t ; de manière équivalente, ssi aucun invité n'est encore arrivé à l'instant t ; donc ssi $S_t = 0$.

On a donc : $(R_1 > t) = (S_t = 0)$.

- Déterminer la fonction de répartition de R_1 (qu'on notera F_1).

Montrer que la variable aléatoire R_1 admet une densité et en déterminer une.

R_1 étant à valeurs dans $[0, 1]$, F_1 est nulle sur $]-\infty, 0[$, et vaut 1 sur $[1, +\infty[$.

$\forall t \in [0, 1]$, $F_1(t) = P(R_1 \leq t) = 1 - P(R_1 > t) = 1 - P(S_t = 0) = 1 - (1 - t)^n$.

Cette fonction de répartition est bien continue sur \mathbb{R} (car $1 - (1 - t)^n$ tend vers 0 en 0^+ et vers 1 en 1^-), et \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} privé de 0 et 1. R_1 est donc à densité ; on en trouve une densité en dérivant F_1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. On obtient une densité f_1 donnée par

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ n(1-t)^{n-1} & \text{si } t \in]0, 1[\\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

et on complète en posant par exemple $f_1(0) = f_1(1) = 0$.

4. Soit R_2 la variable aléatoire égale à l'instant de la deuxième arrivée.

Montrer que la variable aléatoire R_2 admet une densité et en déterminer une.

C'est similaire à la méthode précédente. $R_2 > t$ ssi, à l'instant t , on a au plus un invité arrivé ; donc ssi $S_t \leq 1$. On a donc $P(R_2 > t) = P(S_t = 0) + P(S_t = 1) = (1-t)^n + nt(1-t)^{n-1}$ (loi binômiale) ; donc

$$\forall t \in [0, 1], P(R_2 \leq t) = 1 - (1-t)^n - nt(1-t)^{n-1}$$

Par les mêmes arguments, R_2 est à densité, et on obtient une densité g donnée par :

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [0, 1] \\ n(1-t)^{n-1} + n(n-1)t(1-t)^{n-2} - n(1-t)^{n-1} & \text{si } t \in [0, 1] \end{cases}$$

ou après un peu de simplification :

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [0, 1] \\ n(n-1)t(1-t)^{n-2} & \text{si } t \in [0, 1] \end{cases}$$

5. Informatique.

Dans les codes qui suivent on supposera que les imports usuels suivants ont été réalisés :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
```

(a) Écrire un programme renvoyant la valeur minimale d'une liste L.

Algorithme classique.

```
def minimum(L):
    m=L[0]
    for k in range(1, len(L)):
        if L[k]<m:
            m=L[k]
    return m
```

(b) Compléter le programme suivant qui prend en argument une liste (ou un np.array) L de longueur $n \geq 2$ et renvoie le « second plus petit élément » de L (c'est-à-dire le second élément de la liste qu'on obtiendrait en triant les éléments de L par ordre croissant).

Par exemple cette fonction renverra 3 pour la liste [0, 4, 3, 5, 17, 4] ; et 1 pour la liste [1, 2, 4, 3, 1].

```
def second_plus_petit(L):
    """ au cours de l'exécution de ce code,
    m1 sera le min des valeurs rencontrées,
    et m2 le second plus petit élément """
    if L[0]<L[1]:
        m1=L[0] # min
        m2=L[1] # second min
    else:
        m1=L[1]
        m2=L[0]
    for k in range(2, len(L)):
        if L[k]<m1: # nouveau min
            m2=m1
            m1=L[k]
        elif L[k]<m2: #nouveau second min
            m2=L[k]
    return m2
```

- (c) On rappelle que `rd.random(n)` renvoie un `np.array` à n éléments dont les composantes sont des tirages de variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{U}([0, 1])$.

Utiliser la fonction codée dans la question précédente pour générer un tirage aléatoire de R_2 .

Il suffit d'exécuter `rd.random(n)`, ce qui renvoie les temps d'arrivée des n personnes ; et de récupérer le second plus petit temps d'arrivée.

On écrit donc simplement

```
r2=second_plus_petit(rd.random(n))
```