ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2025-2026
Mathématiques

Préparation Oral HEC

Séance 1

Exercice à préparer (2025)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et suivant la loi exponentielle de paramètre 1 . On pose $T = \max(X, Y)$ et $W = \dfrac{1}{T}$.
L'objectif de cet exercice est d'étudier l'existence et la valeur éventuelle de l'espérance de la variable aléatoire W.

1. *Cours :* donner la définition d'une variable à densité.

2. On suppose que le module Python `numpy.random` a été importé sous l'alias `rd`. Justifier que la fonction Python écrite ci-dessous permet de simuler une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

```python
def expo():
    return -log(rd.random())
```

3. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire T.
Démontrer alors que T admet une densité, et en déterminer une.

4. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \quad \varphi(t) = 2 \times \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}$$

Montrer que φ se prolonge par une fonction continue en 0 . On notera encore φ le prolongement obtenu et ainsi φ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

5. (a) Démontrer que la variable aléatoire W admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t$ converge.
   (b) En déduire que W admet une espérance.

6. On admet alors que $\mathbb{E}(W) = \displaystyle\lim_{x \to 0^+} \int_x^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t$ et on souhaite calculer $\mathbb{E}(W)$.
   (a) Démontrer que : pour tout $x > 0$, les intégrales $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{2x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ convergent et
   $$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{2x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$
   (b) En déduire la valeur de $\mathbb{E}(W)$.

Exercice sans préparation (2025)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - A = I_n$.
Déterminer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, un expression de A^p en fonction de A, I_n et p.