Préparation Oral HEC

Séance 2

Exercice à préparer (2024)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $n \in [\![0, N]\!]$. Un joueur arrive au casino avec une fortune de n euros et joue à la roulette. À chaque partie, la probabilité de gagner vaut p avec $p \in]0,1[$. Le déroulement d'une partie est le suivant : le joueur mise un euro, s'il gagne on lui rend son euro avec un euro de plus, s'il perd on ne lui donne rien.

Le joueur a décidé de s'arrêter de jouer lorsqu'il aura tout l'argent disponible dans le casino, soit N euros, ou lorsqu'il n'aura plus d'argent. On note T_n la variable aléatoire représentant le temps de jeu du joueur.
On admet que la variable aléatoire T_n admet une espérance notée $\mathbb{E}(T_n)$.

1. *Question de cours :* Énoncer la formule des probabilités totales.
2. Écrire une fonction Python qui renvoie une simulation de la variable aléatoire T_n.
3. Soit $j \in \mathbb{N}^*$. On suppose dans cette question que $n \in [\![1, N-1]\!]$.
   Montrer que $\mathbb{P}(T_n = j) = p\mathbb{P}(T_{n+1} = j-1) + (1-p)\mathbb{P}(T_{n-1} = j-1)$.
4. En déduire que, pour tout $n \in [\![1, N-1]\!]$,
   $$\mathbb{E}(T_n) = p(1 + \mathbb{E}(T_{n+1})) + (1-p)(1 + \mathbb{E}(T_{n-1})).$$
5. On suppose que $p \neq \frac{1}{2}$. Déterminer une expression de $\mathbb{E}(T_n)$ en fonction de n, p et N. On pourra faire intervenir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \mathbb{E}(T_n) + n\alpha$ avec α un réel à déterminer.

Exercice sans préparation (2019)

On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 2 .

1. Construire une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée de matrices inversibles.
2. Construire une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée de matrices diagonalisables.