

Préparation Oral HEC

Séance 2 : Corrigé et remarques

Exercice à préparer (2024)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$. Un joueur arrive au casino avec une fortune de n euros et joue à la roulette. À chaque partie, la probabilité de gagner vaut p avec $p \in]0, 1[$. Le déroulement d'une partie est le suivant : le joueur mise un euro, s'il gagne on lui rend son euro avec un euro de plus, s'il perd on ne lui donne rien.

Le joueur a décidé de s'arrêter de jouer lorsqu'il aura tout l'argent disponible dans le casino, soit N euros, ou lorsqu'il n'aura plus d'argent. On note T_n la variable aléatoire représentant le temps de jeu du joueur.

On admet que la variable aléatoire T_n admet une espérance notée $E(T_n)$.

1. **Question de cours : Énoncer la formule des probabilités totales.**

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements, et B un événement. On a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i \cap B)$$

Si de plus : $\forall i \in I, \mathbb{P}(A_i) \neq 0$ on peut aussi écrire :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}_{A_i}(B) \mathbb{P}(A_i)$$

2. **Écrire une fonction Python qui renvoie une simulation de la variable aléatoire T_n .**

On initialise la fortune f du joueur à n , puis on l'augmente / diminue au gré des parties (victoires avec proba p). On s'arrête dès que la fortune vaut 0 ou N .

```
import numpy.random as rd
def simulT(n, N, p):
    f = n
    T = 0
    while f > 0 and f < N:
        if rd.random() < p:
            f = f + 1
        else:
            f = f - 1
        T = T + 1
    return T
```

3. **Soit $j \in \mathbb{N}^*$. On suppose dans cette question que $n \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket$.
Montrer que $\mathbb{P}(T_n = j) = p \mathbb{P}(T_{n+1} = j - 1) + (1 - p) \mathbb{P}(T_{n-1} = j - 1)$.**

En lisant les quantités intervenant dans la formule à démontrer, on relie les événements :

- « terminer en j parties en partant d'une fortune initiale n » ;

- « terminer en $j - 1$ parties en partant d'une fortune initiale $n + 1$ » ;
- « terminer en $j - 1$ parties en partant d'une fortune initiale $n - 1$ » .

Il s'agit donc de distinguer selon le résultat de la *première partie*. Soit donc G_1 (resp. P_1) l'événement : « on gagne (resp. on perd) la première partie ». (G_1, P_1) est un SCE, avec $\mathbb{P}(G_1) = p$ et $\mathbb{P}(P_1) = 1 - p$ non nulles. D'après les probas totales on a donc :

$$\mathbb{P}(T_n = j) = \mathbb{P}(G_1)\mathbb{P}_{G_1}(T_n = j) + \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}_{P_1}(T_n = j) = p\mathbb{P}_{G_1}(T_n = j) + (1 - p)\mathbb{P}_{P_1}(T_n = j)$$

Attention, G_1 et $(T_n = j)$ ne sont pas forcément indépendants car tous deux mettent en jeu le résultat de la première expérience. De même pour P_1 et $(T_n = j)$.

Considérons $\mathbb{P}_{G_1}(T_n = j)$: c'est la proba, sachant qu'on a gagné la première partie, de terminer en n parties. Cette probabilité est identique à celle de partir avec $n + 1$ euros, et de terminer en $j - 1$ parties. (*mais attention, on ne parle quand même pas des mêmes événements !*)

On a donc

$$\mathbb{P}_{G_1}(T_n = j) = \mathbb{P}(T_{n+1} = j - 1)$$

et de même

$$\mathbb{P}_{P_1}(T_n = j) = \mathbb{P}(T_{n-1} = j - 1)$$

ce qui permet d'obtenir la formule demandée.

4. En déduire que, pour tout $n \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket$,

$$\mathbb{E}(T_n) = p(1 + \mathbb{E}(T_{n+1})) + (1 - p)(1 + \mathbb{E}(T_{n-1})).$$

T_n est à valeurs dans \mathbb{N}^* donc¹

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{j=1}^{+\infty} j \mathbb{P}(T_n = j)$$

Avec la question précédente :

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{j=1}^{+\infty} j (p \mathbb{P}(T_{n+1} = j - 1) + (1 - p) \mathbb{P}(T_{n-1} = j - 1))$$

Par positivité de tous les termes :

- $0 \leq j p \mathbb{P}(T_{n+1} = j - 1) \leq j \mathbb{P}(T_n = j)$ donc la série de TG $j \mathbb{P}(T_{n+1} = j - 1)$ converge ;
- de même la série de TG $j \mathbb{P}(T_{n-1} = j - 1)$ converge.

On peut alors découper :

$$\mathbb{E}(T_n) = p \sum_{j=1}^{+\infty} j \mathbb{P}(T_{n+1} = j - 1) + (1 - p) \sum_{j=1}^{+\infty} j \mathbb{P}(T_{n-1} = j - 1)$$

Deux décalages d'indice donnent

$$\mathbb{E}(T_n) = p \sum_{j=0}^{+\infty} (j + 1) \mathbb{P}(T_{n+1} = j) + (1 - p) \sum_{j=0}^{+\infty} (j + 1) \mathbb{P}(T_{n-1} = j)$$

puis en découpant (en séries cv ici encore, par positivité) :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} (j + 1) \mathbb{P}(T_{n+1} = j) = \sum_{j=0}^{+\infty} j \mathbb{P}(T_{n+1} = j) + \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_{n+1} = j) = \mathbb{E}(T_{n+1}) + 1$$

¹Autrement dit, $T_n(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. Pas besoin de se demander si chaque $k \in \mathbb{N}^*$ est atteint avec proba non nulle ; au pire certains termes de la somme ci-dessous seront nuls mais ça ne change rien au calcul.

et de même pour le second terme. Finalement :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_n) &= p \sum_{j=0}^{+\infty} (j+1) \mathbb{P}(T_{n+1} = j) + (1-p) \sum_{j=0}^{+\infty} (j+1) \mathbb{P}(T_{n-1} = j) \\ &= p (\mathbb{E}(T_{n+1}) + 1) + (1-p) (\mathbb{E}(T_{n-1}) + 1)\end{aligned}$$

5. On suppose que $p \neq \frac{1}{2}$. Déterminer une expression de $\mathbb{E}(T_n)$ en fonction de n, p et N . On pourra faire intervenir une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \mathbb{E}(T_n) + n\alpha$ avec α un réel à déterminer.

Introduisons l'expression $\mathbb{E}(T_n) = u_n - n\alpha$ dans la formule précédente et notons $q = 1 - p$:

On a

$$u_n - n\alpha = p(u_{n+1} - (n+1)\alpha + 1) + q(u_{n-1} - (n-1)\alpha + 1)$$

d'où

$$\begin{aligned}u_n &= n\alpha + p(u_{n+1} - (n+1)\alpha + 1) + q(u_{n-1} - (n-1)\alpha + 1) \\ &= pu_{n+1} + qu_{n-1} + 1 + (q-p)\alpha \quad (\text{en utilisant } p+q=1)\end{aligned}$$

On peut donc choisir $\alpha = \frac{1}{p-q}$ ($p \neq q$ dans l'énoncé) pour tomber sur une arithmético-géométrique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, pu_{n+1} - u_n + qu_{n-1} = 0$$

qu'on résout avec les deux conditions initiales $u_0 = \mathbb{E}(T_0) = 0$ et $u_N = \mathbb{E}(T_N) + N\alpha = \frac{N}{p-q}$. cf. corrigé officiel.

NB : dans la question 3 on fait des probas totales sur la première étape du processus, et on invoque une « invariance par translation » : on se ramène au même processus mais partant du temps 1, et avec une autre condition initiale. Pour d'autres apparitions de ce raisonnement, voir :

- ESSEC2 2016 (donné en CB1.2), question 6c
- le DS2, Exercice 2, question 6a (et la remarque faite dans le corrigé à ce propos)

On peut aussi consulter l'exercice suivant :

Exercice 1. On lance une pièce avec la probabilité p de faire « Pile ». On note A_n l'événement : « on obtient pour la première fois deux Piles consécutifs lors du n -ième lancer » (ie aux lancers $n-1$ et n) et l'on désire calculer sa probabilité a_n . On note $q = 1 - p$.

1. Déterminer a_1, a_2 et a_3 .
2. Exprimer a_{n+2} en fonction de a_n et a_{n+1} pour $n \geq 1$.
3. Justifier qu'il est quasi-certain d'obtenir deux piles consécutifs.
4. Déterminer le nombre d'essais moyen pour obtenir deux piles consécutifs.

Indications / Réponses

1. $a_1 = 0, a_2 = p^2, a_3 = qp^2$.

2. $n \geq 1$ donc $n+2 \geq 3$ lancers. On distingue selon les deux premiers lancers, avec le SCE $(P_1P_2, P_1F_2, F_1P_2, F_1F_2)$, ou mieux le SCE (F_1, P_1P_2, P_1F_2) .

Alors

$$\mathbb{P}(A_{n+2}) = \mathbb{P}_{F_1}(A_{n+2})\mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}_{P_1P_2}(A_{n+2})\mathbb{P}(P_1P_2) + \mathbb{P}_{P_1F_2}(A_{n+2})\mathbb{P}(P_1F_2)$$

et notre « argument de translation » donne ici $\mathbb{P}_{F_1}(A_{n+2}) = \mathbb{P}(A_{n+1})$ et $\mathbb{P}_{P_1F_2}(A_{n+2}) = \mathbb{P}(A_n)$; de plus $\mathbb{P}_{P_1P_2}(A_{n+2}) = 0$.

On trouvera finalement

$$a_{n+2} = qa_{n+1} + pqa_n \quad (\mathcal{R})$$

NB : à ce stade c'est fini : on peut avoir explicitement les (a_n) (avec a_1, a_2 et la relation de récurrence linéaire) et en déduire tout ce qu'on souhaite. Mais les calculs sont un peu pénibles ; et les deux questions suivantes montrent comment, pour obtenir certaines propriétés, il est possible de les contourner.

3. Il s'agit de montrer que $S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1$. Pour cela sommer la relation (\mathcal{R}) pour obtenir

$$S - (a_1 + a_2) = q(S - a_1) + pqS$$

ce qui donne $S = 1$.

4. (a_n) est récurrente linéaire d'ordre 2 donc combinaison de suites géométriques (r^n) ou géométriques dérivées (nr^{n-1}) . Comme $a_n \rightarrow 0$ on a toujours $|r| < 1$ et donc la série $\sum na_n$ sera cv (géom dérivée) et donc la variable donnant le temps d'attente de « PP » admet une espérance (introduire cette variable T tq $A_n = (T = n)$).

On peut alors faire comme précédemment et travailler sur la somme $\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n$ en utilisant (\mathcal{R}) . On écrit, pour tout $n \geq 1$,

$$(n+2)a_{n+2} = q(n+2)a_{n+1} + pq(n+2)a_n$$

et on somme pour obtenir

$$\mu - 2a_2 - a_1 = q((\mu - a_1) + (S - a_1)) + pq(\mu + 2S)$$

et finalement $\mu = \frac{1+p}{p^2}$.