

Planche 1

Exercice à préparer 1

1. Cours: que peut-on dire de la concaténation de familles libres de sous-espaces propres de \mathbb{R}^n associés à des valeurs propres distinctes?
2. (a) Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto \frac{1}{1+x} + \frac{2}{2+x}$.
Étudier la fonction f sur son ensemble de définition et dresser un tableau de variations complet.
En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$.
(b) Déterminer les solutions exactes de l'équation $f(x) = 1$.

Soit A_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont nuls et tels que les autres coefficients situés sur la colonne j sont égaux à j pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

3. Écrire une fonction Python d'argument n renvoyant A_n .
4. Pour $n \geq 2$, On pose :

$$f_n : t \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+t}$$

et on considère l'équation E_n d'inconnue $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{k+\lambda} = 1$$

On admet que toutes les valeurs propres de A_n sont les solutions de l'équation E_n .
La matrice A_n est-elle diagonalisable ?

5. Pour $n \geq 2$, on appelle λ_n la solution de E_n comprise entre -2 et -1.
 - (a) Justifier que pour tout entier naturel n non nul, pour tout réel t de $] -2, -1[$, $f_n(t) \leq f_{n+1}(t)$. et en déduire la monotonie de la suite (λ_n) .
 - (b) Montrer que la suite (λ_n) converge vers un réel ℓ .
Si l'on suppose que $\ell \in] -2, -1[$, comparer $f_n(\lambda_n)$ et $f_n(\ell)$.
 - (c) Pour $\lambda \in] -2, -1[$, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+\lambda}$ et conclure sur la valeur de ℓ .
 - (d) Montrer que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k} \leq 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
 - (e) Déterminer un équivalent de $\frac{1}{1+\lambda_n}$ puis de λ_n+1 . On pourra utiliser un encadrement de $\sum_{k=3}^n \frac{k}{k+\lambda_n}$.

Exercice sans préparation 1

On dispose du programme ci-dessous. Interpréter la valeur affichée par son exécution.

```
L = ['O', 'E', 'N', 'S']
P = []
for a in L:
    for b in L:
        for c in L:
            for d in L:
                for e in L:
                    for f in L:
                        for g in L:
                            for h in L:
                                for i in L:
                                    for j in L:
                                        P.append([a,b,c,d,e,f,g,h,i,j])

n = 0
for e in P:
    if e.count('O') == e.count('E') and e.count('N') == e.count('S'):
        n += 1
print(n/len(P))
```

Planche 2

Exercice à préparer 2

On cherche à trouver des individus au sein d'une population possédant une propriété détectable par une analyse de sang (par exemple, être malade). On fixe $q \in]0, 1[$ et l'on suppose que les individus ont, indépendamment les uns des autres, une probabilité q de ne pas posséder la propriété recherchée. Le résultat de l'analyse d'un échantillon de sang est dit positif si la propriété est présente, négatif si elle ne l'est pas. On va étudier divers protocoles de test.

On désire dans un premier temps trouver toutes les personnes qui ont la propriété dans un ensemble de n personnes, où n est un entier tel que $n \geq 2$.

1. Cours: définition de l'espérance d'une variable aléatoire réelle X et expression.
2. Dans cette question, on étudie le protocole A, qui consiste à mélanger le sang des n personnes et analyser ce mélange. Si le résultat est négatif, on s'arrête (car cela signifie alors que personne ne possède la propriété recherchée). S'il est positif, on analyse alors individuellement le sang de chacune des n personnes. On note A_n la variable aléatoire qui compte le nombre d'analyses effectuées en appliquant ce protocole A pour n personnes.
 - (a) Déterminer la loi de A_n .
 - (b) Prouver que $\mathbb{E}(A_n) = n + 1 - nq^n$.
 - (c) Écrire une fonction en langage Python qui prend en argument une liste L de n booléens et renvoie la valeur de A_n , en considérant qu'un `True` en k^e position signifie que la k^e personne possède la propriété recherchée, un `False` qu'elle ne la possède pas.
 - (d) On considère un entier naturel k tel que $1 \leq k < n$.
Calculer la probabilité que les k premières personnes testées soient toutes négatives sachant que le résultat de l'analyse du mélange est positif.
3. Dans cette question, on étudie le protocole B, qui consiste à directement analyser individuellement le sang de chacune des n personnes.
Justifier que, pour n assez grand, l'un des deux protocoles (que l'on déterminera) est préférable à l'autre (c'est-à-dire donne lieu à moins d'analyses en moyenne).
4. Dans cette question, on étudie un procédé « par regroupements » : on mélange le sang des n premières personnes de la population puis l'on teste ce mélange. Si le résultat est négatif, on procède de même avec les n personnes suivantes.
Dès lors qu'un groupe de n personnes est testé positivement, on teste alors individuellement les n personnes de ce groupe, jusqu'à trouver la première personne possédant la propriété recherchée. On note G la variable aléatoire représentant le numéro du premier groupe positif. Ainsi, $G = 1$ si c'est le premier groupe qui a donné un test positif, $G = 2$ si c'est le second, etc. On considère k un entier strictement positif.
 - (a) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(G > k)$.
 - (b) En déduire la loi de G .

Exercice sans préparation 2

Soient b, c et d des constantes réelles et considérons l'équation $f(x) = 0$ avec $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Justifier brièvement pourquoi il existe un entier naturel m tel que $f(m)f(-m) < 0$.
2. Écrire une fonction Python qui renvoie le plus petit entier naturel m_0 vérifiant $f(m_0)f(-m_0) < 0$.
3. Écrire un programme qui renvoie la valeur approchée d'une solution de $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[-m_0, m_0]$, à une précision ε passée en argument.