Planche 1 - Corrigé

Exercice à préparer 1

1. **Cours: que peut-on dire de la concaténation de familles libres de sous-espaces propres de $\mathbb{R}^n$ associés à des valeurs propres distinctes?**

   C'est une famille libre .

2. (a) **Soit f la fonction définie par $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{2}{2+x}$.**
   Étudier la fonction f sur son ensemble de définition et dresser un tableau de variations complet. En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$.

   f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$; on a

   $$\forall\, x \in \mathscr{D}_f,\ f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{2}{(2+x)^2} < 0$$

   ce qui assure que f est strictement décroissante sur $]-\infty, -2[$, sur $]-2, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$.
   Avec des limites sans difficulté on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$		$-$		
$f(x)$	0	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	0
		$-\infty$		$-\infty$			

   Sur les 3 intervalles sus-mentionnés on peut appliquer le théorème de la bijection : f continue et strictement décroissante réalise :

   - une bijection de $]-\infty, -2[$ sur $\mathbb{R}_-^*$;
   - une bijection de $]-2, -1[$ sur $\mathbb{R}$;
   - une bijection de $]-1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Il n'y a donc pas e solution à $f(x) = 1$ sur $]-\infty, -2[$; il y en a exactement une sur $]-2, -1[$ et une sur $]-1, +\infty[$.

   (b) **Déterminer les solutions exactes de l'équation $f(x) = 1$.**

   Rien de mystérieux :

$$\begin{aligned} f(x) = 1 &\Leftrightarrow \frac{(2+x)+2(1+x)}{(1+x)(2+x)} = 1 \\ &\Leftrightarrow 4 + 3x = (1+x)(2+x) \\ &\Leftrightarrow 4 + 3x = (1+x)(2+x) \\ &\Leftrightarrow x^2 = 2 \\ &\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

Soit A_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont nuls et tels que les autres coefficients situés sur la colonne j sont égaux à j pour $j \in [\![1, n]\!]$.

3. **Écrire une fonction Python d'argument n renvoyant A_n.**

   On peut par exemple proposer :

```
import numpy as np
def matrice(n):
    M = np.zeros((n,n))
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if i!=j:
                M[i,j]=j
    return M
```

4. **Pour $n \geqslant 2$, On pose :**

$$f_n : t \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+t}$$

et on considère l'équation E_n d'inconnue $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+\lambda} = 1$$

On admet que toutes les valeurs propres de A_n sont les solutions de l'équation E_n.
La matrice A_n est-elle diagonalisable ?

La fonction f_n s'étudie comme dans la question 2 (cas $n = 2$) : il y a des valeurs interdites en $-n$, $-(n-1)$, ..., -1.
On a alors que f_n réalise une bijection strictement décroissante de :

- $]-\infty, -n[$ sur $\mathbb{R}_-^*$;
- $]-k, -(k-1)[$ sur $\mathbb{R}$, pour $k \in [\![2, n]\!]$;
- $]-1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

et l'équation $f_n(\lambda) = 1$ admet une solution sur chaque intervalle $]-k, -(k-1)[$, pour $k \in [\![2, n]\!]$; et une sur $]-1, +\infty[$. Il y a donc n solutions distinctes.

$\mathrm{A}_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admet donc n valeurs propres. Une famille de n vecteurs propres associés à des vap deux à deux distinctes est libre d'après le cours ; de cardinal $n = \dim(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$; donc c'est une base de vecteurs propres de A_n et on en déduit que A_n est diagonalisable.

5. **Pour $n \geqslant 2$, on appelle λ_n la solution de E_n comprise entre -2 et -1.**

   (a) **Justifier que pour tout entier naturel n non nul, pour tout réel t de $]-2, -1[$, $f_n(t) \leqslant f_{n+1}(t)$ et en déduire la monotonie de la suite (λ_n).**

   Pour tout $t \in]-2, -1[$, $f_{n+1}(t) - f_n(t) = \dfrac{n+1}{n+1+t}$; $n+1 > 0$ et $t > -2$ donc $n+1+t > n-1 \geqslant 0$ donc $f_{n+1}(t) - f_n(t) \leqslant 0$.
   On choisit $t = \lambda_n \in]-2, -1[$ et on a donc

$$f_n(\lambda_n) = 1 \leqslant f_{n+1}(\lambda_n)$$

   ce qui s'écrit aussi

$$1 = f_{n+1}(\lambda_{n+1}) \leqslant f_{n+1}(\lambda_n)$$

   et par stricte décroissance de f_{n+1} sur $]-2, -1[$ on en déduit $\lambda_{n+1} \geqslant \lambda_n$: la suite (λ_n) est croissante.

   (b) **Montrer que la suite (λ_n) converge vers un réel ℓ.**
   Si l'on suppose que $\ell \in]-2, -1[$, comparer $f_n(\lambda_n)$ et $f_n(\ell)$.

   (λ_n) est majorée par -1 (par définition) et croissante ; donc elle converge vers $\ell \in]-2, -1]$. Si $\ell \in]-2, -1[$, $\lambda_n \leqslant \ell$ (par monotonie de (λ_n)) donne $f_n(\lambda_n) \geqslant f_n(\ell)$.

   (c) **Pour $\lambda \in]-2, -1[$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{k+\lambda}$ et conclure sur la valeur de ℓ.**

   $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{k}{k+\lambda} = 1$ donc $\sum\limits_k \dfrac{k}{k+\lambda}$ diverge grossièrement, et comme il s'agit d'une SATP les sommes partielles croissent vers $+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+\lambda} = +\infty$$

   Supposons $\ell \in]-2, -1[$: ce qui précède montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(\ell) = +\infty$; or on a aussi : $\forall\, n \geqslant 2,\ 1 = f_n(\lambda_n) \geqslant f_n(\ell)$: contradiction.
   On conclut donc que $\ell = -1$.

(d) **Montrer que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k} \leqslant 2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.**

Par expression conjuguée :

$$\sqrt{k}-\sqrt{k-1} = \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} \geqslant \frac{2}{\sqrt{k}} \geqslant \frac{2}{k}$$

ce qui établit l'inégalité demandée.

On somme ensuite : pour tt $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k}-\sqrt{k-1}) = \frac{2}{n}\sqrt{n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

et cette somme étant positive le théorème des gendarmes assure que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) = 0$$

(e) **Déterminer un équivalent de $\frac{1}{1+\lambda_n}$ puis de λ_n+1. On pourra utiliser un encadrement de $\sum\limits_{k=3}^{n} \frac{k}{k+\lambda_n}$.**

Rappelons que, comme λ_n est solution de $f_n(x) = 1$ on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+\lambda_n} = 1$$

$\lambda_n \to -1$ donc il faut isoler le terme $k = 1$ de cette somme ; isolons aussi $k = 2$ pour écrire :

$$\frac{1}{1+\lambda_n} = 1 - \frac{2}{2+\lambda_n} - \sum_{k=3}^{n} \frac{k}{k+\lambda_n} \qquad (*)$$

On travaille un peu sur la somme : $-2 \leqslant \lambda_n \leqslant -1$ donne, pour tout $k \geqslant 3$:

$$\frac{k}{k-1} \leqslant \frac{k}{k+\lambda_n} \leqslant \frac{k}{k-2}$$

puis on somme, on change d'indice, et on secoue fort :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{n} \frac{k}{k-1} \leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{k}{k+\lambda_n} &\leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{k}{k-2} \\
\sum_{k=2}^{n-1} \frac{k-1}{k} \leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{k}{k+\lambda_n} &\leqslant \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k+2}{k} \\
\sum_{k=2}^{n-1} \underbrace{\frac{k+1}{k}}_{=1+\frac{1}{k}} \leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{k}{k+\lambda_n} &\leqslant \sum_{k=1}^{n-2} \underbrace{\frac{k+2}{k}}_{=1+\frac{2}{k}} \\
n-2+\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{k}{k+\lambda_n} &\leqslant (n-2)+2\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

Le résultat de la question précédente montre que $\sum\limits_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$ ce qui montre, après un certain nombre d'opérations dont on a l'habitude, que

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{k}{k+\lambda_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$$

et en reprenant $(*)$ on conclut

$$\frac{1}{1+\lambda_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -n$$

puis $1+\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$.

Exercice sans préparation 1

On dispose du programme ci-dessous. Interpréter la valeur affichée par son exécution.

```
L = ['O','E','N','S']
P = []
for a in L:
    for b in L:
        for c in L:
            for d in L:
                for e in L:
                    for f in L:
                        for g in L:
                            for h in L:
                                for i in L:
                                    for j in L:
                                        P.append([a,b,c,d,e,f,g,h,i,j])
n = 0
for e in P:
    if e.count('O') == e.count('E') and e.count('N') == e.count('S'):
        n += 1
print(n/len(P))
```

Il faut comprendre que O,E,N,S sont Ouest, Est, Nord, Sud.
On considère alors un mobile qui se déplace aléatoirement dans le plan. À chaque instant, le mobile peut se déplacer de manière équiprobable d'une unité vers la gauche (Ouest), vers la droite (Est), vers le haut (Nord) ou vers le bas (Sud). La liste `P` contient alors, à la fin des 10 boucles imbriquées, l'ensemble des trajectoires possibles pour 10 déplacements.
Ensuite, n compte le nombre de ces trajectoires où le nombre de pas vers la gauche est égal au nombre de pas vers la droite, et où le nombre de pas vers le haut est égal au nombre de pas vers le bas. Il s'agit donc des trajectoires où, à l'issue des 10 déplacements, le mobile est revenu à l'origine. Comme tous les déplacements sont équiprobables, le quotient renvoyé est alors la probabilité de retour à l'origine après 10 déplacements.

Planche 2

Exercice à préparer 2

On cherche à trouver des individus au sein d'une population possédant une propriété détectable par une analyse de sang (par exemple, être malade). On fixe $q \in]0,1[$ et l'on suppose que les individus ont, indépendamment les uns des autres, une probabilité q de ne pas posséder la propriété recherchée. Le résultat de l'analyse d'un échantillon de sang est dit positif si la propriété est présente, négatif si elle ne l'est pas. On va étudier divers protocoles de test.
On désire dans un premier temps trouver toutes les personnes qui ont la propriété dans un ensemble de n personnes, où n est un entier tel que $n \geqslant 2$.

1. **Cours: définition de l'espérance d'une variable aléatoire réelle X et expression.**

   - Cas discret : X admet une espérance ssi la série $\sum_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} x\mathbb{P}(\mathrm{X}=x)$ converge absolument ; et on a dans ce cas
   $$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \sum_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} x\mathbb{P}(\mathrm{X}=x)$$
   - Cas à densité : Si f_{X} est une densité de X, X admet une espérance ssi l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\mathrm{X}}(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument ; et on a dans ce cas
   $$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\mathrm{X}}(x)\,\mathrm{d}x$$

2. **Dans cette question, on étudie le protocole A, qui consiste à mélanger le sang des n personnes et analyser ce mélange. Si le résultat est négatif, on s'arrête (car cela signifie alors que personne ne possède la propriété recherchée). S'il est positif, on analyse alors individuellement le sang de chacune des n personnes. On note A_n la variable aléatoire qui compte le nombre d'analyses effectuées en appliquant ce protocole A pour n personnes.**

   (a) **Déterminer la loi de A_n.**

   A_n peut valoir 1 si le test du mélange est négatif, ou $1+n$ si le test du mélange est positif car on effectue alors n test supplémentaires.
   En rappelant qu'un individu ne possède pas la propriété avec une proba q, et que les n individus sont indépendants, on obtient que la proba que le mélange soit négatif est égale à q^n : d'où
   $$\mathbb{P}(\mathrm{A}_n = 1) = q^n$$
   et par suite
   $$\mathbb{P}(\mathrm{A}_n = n+1) = 1-q^n$$

   (b) **Prouver que $\mathbb{E}(\mathrm{A}_n) = n+1-nq^n$.**

   Sans difficulté :
   $$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathrm{A}_n) &= 1\times\mathbb{P}(\mathrm{A}_n=1) + (n+1)\times\mathbb{P}(\mathrm{A}_n=n+1)\\ &= q^n + (n+1)(1-q^n)\\ &= n+1-nq^n\end{aligned}$$

   (c) **Écrire une fonction en langage Python qui prend en argument une liste `L` de n booléens et renvoie la valeur de A_n, en considérant qu'un `True` en k^e position signifie que la k^e personne possède la propriété recherchée, un `False` qu'elle ne la possède pas.**

   On reçoit donc une liste de `True` et `False`. D'après les explications précédentes, on a $\mathrm{A}_n = 1$ ssi la liste est consituée uniquement de `False` ; et $\mathrm{A}_n = n+1$ ssi la liste contient au moins un `True`. On propose alors

```
def A(L):
    if True in L:
        return len(L)+1
    return 1
```

(d) **On considère un entier naturel k tel que $1 \leqslant k < n$.**
Calculer la probabilité que les k premières personnes testées soient toutes négatives sachant que le résultat de l'analyse du mélange est positif.

Là il faut commencer à formaliser un minimum. Posons l'événement N_k : « la personne k est négative » ; et N : « le mélange est négatif » .
On a justifié que $\mathbb{P}(\mathrm{N}) = q^n$; ainsi $\mathbb{P}(\overline{\mathrm{N}}) = 1 - q^n$.
On nous demande $\mathbb{P}_{\overline{\mathrm{N}}}(\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{N}_k)$. Par Bayes :

$$\mathbb{P}_{\overline{\mathrm{N}}}\left(\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{N}_k\right) = \frac{\mathbb{P}(\overline{\mathrm{N}} \cap \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{N}_k)}{\mathbb{P}(\overline{\mathrm{N}})} = \frac{\mathbb{P}_{\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{N}_k}(\overline{\mathrm{N}})\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{N}_k\right)}{\mathbb{P}(\overline{\mathrm{N}})}$$

On étudie les termes individuels :

- Sachant que les k premiers individus sont négatifs, le mélange est positif ssi il existe un individu positif dans $[\![k+1, n]\!]$. En passant au contraire et par indépendance des individus :
$$\mathbb{P}_{\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{N}_k}(\overline{\mathrm{N}}) = 1_q^{n-k}$$
- Par indépendance des individus :
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{N}_k\right) = q^k$$
- enfin on a vu
$$\mathbb{P}(\overline{\mathrm{N}}) = 1 - q^n$$

Finalement
$$\mathbb{P}_{\overline{\mathrm{N}}}\left(\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{N}_k\right) = \frac{(1-q^{n-k})q^k}{1-q^n} = \frac{q^k - q^n}{1-q^n}$$

(vérif : si $k = n$ cette proba est nulle et il est clair que l'événement dont on parle est impossible).

3. **Dans cette question, on étudie le protocole** B**, qui consiste à directement analyser individuellement le sang de chacune des n personnes.**

Justifier que, pour n assez grand, l'un des deux protocoles (que l'on déterminera) est préférable à l'autre (c'est-à-dire donne lieu à moins d'analyses en moyenne).

Dans le protocole B on effectue n tests quoiqu'il arrive. Pour comparer le nombre moyen de tests on compare $\mathbb{E}(\mathrm{A}_n) = n + 1 - q^n$ et n.
Or $0 < q < 1$ donc $q^n \to 0$ et $\mathbb{E}(\mathrm{A}_n) \to n+1$: pour n assez grand $\mathbb{E}(\mathrm{A}_n) > \mathbb{E}(\mathrm{B})$ et le protocole B est préférable.
En effet s'il y a beaucoup d'individus on se doute que le test groupé sera toujours positif (il suffit d'un positif) et qu'on aura très probablement à mener les n test supplémentaires.

4. **Dans cette question, on étudie un procédé « par regroupements » : on mélange le sang des n premières personnes de la population puis l'on teste ce mélange. Si le résultat est négatif, on procède de même avec les n personnes suivantes.**
Dès lors qu'un groupe de n personnes est testé positivement, on teste alors individuellement les n personnes de ce groupe, jusqu'à trouver la première personne possédant la propriété recherchée. On note G **la variable aléatoire représentant le numéro du premier groupe positif. Ainsi,** $\mathrm{G} = 1$ **si c'est le premier groupe qui a donné un test positif,** $\mathrm{G} = 2$ **si c'est le second, etc. On considère k un entier strictement positif.**

(a) **Calculer la probabilité $\mathbb{P}(\mathrm{G} > k)$.**

On a $\mathrm{G} > k$ ssi les k premiers tests sont négatifs. Un test (de n individus indépendants) est négatif avec proba q^n ; donc positif avec proba $1 - q^n$.
Les tests successifs sont indépendants car un même individu ne peut pas intervenir dans plusieurs groupes (c'est un argument type lemme des coalitions) ; ainsi

$$\mathbb{P}(\mathrm{G} > k) = (q^n)^k = q^{nk}$$

(b) **En déduire la loi de** G**.**

Comme on n'a pas d'info sur la population totale on va considérer $G(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Pour tout $k \geqslant 2$,

$$\mathbb{P}(G = k) = \mathbb{P}(G > k-1) - \mathbb{P}(G > k) = q^{n(k-1)} - q^{nk} = q^{n(k-1)}(1-q^n)$$

(résultat encore valable pour $k = 1$, $\mathbb{P}(G = 1)$ est la proba que le premier groupe soit positif donc $= 1 - q^n$.
On reconnaît $G \hookrightarrow \mathscr{G}(1-q^n)$.
(ce qu'on aurait pu anticiper car G se présente naturellement comme le rang du premier succès (« le mélange est positif » , avec proba $1-q^n$) dans une succession d'expériences indépendantes)

Exercice sans préparation 2

Soient b, c et d des constantes réelles et considérons l'équation $f(x) = 0$ avec $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. **Justifier brièvement pourquoi il existe un entier naturel m tel que $f(m)f(-m) < 0$.**

   $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^3$ donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ d'où

   $$\lim_{x\to+\infty} f(x)f(-x) = -\infty$$

   Pour m assez grand on aura donc bien $f(m)f(-m) < 0$.

2. **Écrire une fonction Python qui renvoie le plus petit entier naturel m_0 vérifiant $f(m_0)f(-m_0) < 0$.**

   On les teste tous jusqu'à en obtenir un qui convient :

```
def f(b,c,d,x):
    return x**3+b*x**2+c*x+d
def m0(b,c,d):
    m=0
    while f(b,c,d,m)*f(b,c,d,-m) >=0:
        m = m+1
    return m
```

3. **Écrire un programme qui renvoie la valeur approchée d'une solution de $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[-m_0, m_0]$, à une précision ε passée en argument.**

   Par définition de m_0, $f(m_0)$ et $f(-m, 0)$ sont de signe opposé : par TVI (f continue car polynômiale) il existe $\alpha \in]-m_0, m_0[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
   On l'obtient avec une bonne vieille dichotomie d'intervalle initial $[-m_0, m_0]$:

```
def solution(b,c,d,eps):
    m = m0(b,c,d)
    a = -m
    b = m
    while b-a>epsilon:
        c=(a+b)/2
        if f(a)*f(c)<0:
            b=c
        else:
            a=c
    return (a+b)/2
```