Solution de l'exercice 14 On considère la fonction H définie sur $]1,+\infty[$ par $H(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

1). Soit $x\in]1,+\infty[$, on remarque que $1<x<x^2$ et donc $[x,x^2]\subset]1,+\infty[$. on peut donc affirmer que :

$$t\mapsto\frac{1}{\ln t}\text{ est continue sur }]1,+\infty[\text{ et donc admet une primitive }F\text{ de classe }\mathcal{C}^1\text{ sur }]1,+\infty[.$$

On a donc pour tout $x>1$:

$$H(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t=[F(t)]_x^{x^2}=F(x^2)-F(x)$$

Comme la fonction carré est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$, par composition, $x\mapsto F(x^2)$ est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$. H est donc la différence de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et on a pour tout $x>1$:

$$H'(x)=2xF'(x^2)-F'(x)=\frac{2x}{\ln(x^2)}-\frac{1}{\ln x}=\frac{x-1}{\ln x}$$

On peut donc conclure :

$$\boxed{H\text{ est de classe }\mathcal{C}^1\text{ sur }]1,+\infty[\text{ et pour tout }x>1,\ H'(x)=\frac{x-1}{\ln x}}$$

2). On remarque que pour tout $x>1$, $u(x)=\dfrac{(x-1)-\ln x}{(x-1)\ln x}$.

On détermine un développement limité de $\ln x$ en $x=1$ en utilisant la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 (La fonction logarithme est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$). Les deux première dérivées sont $x\mapsto\frac{1}{x}$ et $x\mapsto\frac{-1}{x^2}$. On a donc :

$$\begin{aligned}\ln x&=\ln(1)+(x-1)\frac{1}{1}+\frac{1}{2}(x-1)^2\left(\frac{-1}{1^2}\right)+o\left((x-1)^2\right)\\&=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right)\end{aligned}$$

et donc

$$(x-1)-\ln x=\frac{1}{2}(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right)\underset{1}{\sim}\frac{1}{2}(x-1)^2$$

Comme de plus $\ln x\underset{1}{\sim}(x-1)$ et donc $(x-1)\ln x\underset{1}{\sim}(x-1)^2$, on obtient :

$$u(x)=\frac{(x-1)-\ln x}{(x-1)\ln x}\underset{1}{\sim}\frac{\frac{1}{2}(x-1)^2}{(x-1)^2}\underset{1}{\sim}\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\lim_{x\to1}u(x)=\frac{1}{2}}$$

3). On déduit de la question précédente que u est prolongeable par continuité en 1 en une fonction $\tilde{u}$:

$$\begin{aligned}\tilde{u}:[1,+\infty[&\longrightarrow\mathbb{R}\\x&\longmapsto\tilde{u}=\begin{cases}u(x)\text{ si }x>1\\\frac{1}{2}\text{ sinon}\end{cases}\end{aligned}$$

Comme $\tilde{u}$ est continue sur $[1,+\infty[$, elle admet une primitive $\tilde{U}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$.

Pour tout $x>1$:

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \int_x^{x^2} \left[\tilde{u}(t) + \frac{1}{t-1}\right]\mathrm{d}t = \int_x^{x^2} \tilde{u}(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\tilde{U}(t)\right]_x^{x^2} - [\ln(t-1)]_x^{x^2} = \tilde{U}(x^2) - \tilde{U}(x) + \ln(x^2-1) - \ln(x-1) \\ &= \tilde{U}(x^2) - \tilde{U}(x) + \ln\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) = \tilde{U}(x^2) - \tilde{U}(x) + \ln(x+1) \end{aligned}$$

Or comme $\tilde{U}$ est continue sur$[1,+\infty[$, $\lim\limits_{x\to 1}\tilde{U}(x) = \lim\limits_{x\to 1}\tilde{U}(x^2) = \tilde{U}(1)$ donc en faisant tendre x vers 1, on obtient :

$$\boxed{\lim_{x\to 1^+} H(x) = \ln 2}$$