Jour n°3

Exercice 3.1

1) <u>Question de cours :</u> moment d'ordre r d'une variable à densité ; définition et existence.

2) Montrer qu'il existe deux réels A et B, indépendants de x, tels que, pour tout réel $x > 0$ on ait :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}.$$

3) Soit k un réel. On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x(x+1)} & \text{si} \quad x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Déterminer k pour que f soit une densité d'une variable aléatoire X. Donner l'expression de la fonction de répartition de X.

b) X admet-elle une espérance ?

4) On pose $T = \lfloor X \rfloor$ où $\lfloor X \rfloor$ désigne la partie entière de X.

a) Déterminer la loi de T.

b) En déduire la valeur de :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right).$$

5) On pose $Z = \frac{1}{X}$. Déterminer la loi de Z.

6) On pose $Y = X - \lfloor X \rfloor$.

a) Déterminer la loi de Y.

b) Montrer que, pour tout entier $r \geq 1$, Y admet un moment d'ordre r.

c) Calculer l'espérance de Y.

Exercice 3.2

Soit un entier $n \geq 2$ et soit la matrice $A(a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \ a_{i,i} = 0 \quad \text{et} \quad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \ i \neq j \ , \ a_{i,j} = 1.$$

Calculer A^{-1}.

Énoncé

1) Question de cours : moment d'ordre r d'une variable à densité ; définition et existence.

2) Montrer qu'il existe deux réels A et B, indépendants de x, tels que, pour tout réel $x > 0$ on ait :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}.$$

3) Soit k un réel. On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x(x+1)} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Déterminer k pour que f soit une densité d'une variable aléatoire X. Donner l'expression de la fonction de répartition de X.

b) X admet-elle une espérance ?

4) On pose $T = \lfloor X \rfloor$ où $\lfloor X \rfloor$ désigne la partie entière de X.

a) Déterminer la loi de T.

b) En déduire la valeur de :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right).$$

5) On pose $Z = \frac{1}{X}$. Déterminer la loi de Z.

6) On pose $Y = X - \lfloor X \rfloor$.

a) Déterminer la loi de Y.

b) Montrer que, pour tout entier $r \geq 1$, Y admet un moment d'ordre r.

c) Calculer l'espérance de Y.

Analyse stratégique de l'énoncé

Cet exercice ne pose pas de difficulté excessive, mais il est assez long. Il n'est pas simple pour les candidats d'arriver à le traiter en entier dans le temps imparti.

1) Veillez à bien donner la définition complète avec la condition exacte d'existence, qu'il ne faudra pas oublier de justifier quand cela sera demandé dans l'exercice.
↪ Faire la différence entre la définition (la donnée de l'intégrale) et la propriété liée au théorème du transfert.

2) Il s'agit de calculs simples de mises au dénominateur commun. Les erreurs de calcul sont cependant fréquentes et très dommageables.

↪ Lors de l'exposé, il ne s'agira pas de détailler tous les calculs. Il suffira de présenter la méthode avec rigueur puis de donner la solution trouvée pendant la préparation.

3) a) Il faut avoir présent à l'esprit les trois points à vérifier, pour en déduire ensuite la valeur de k. Le calcul de la fonction de répartition se fait alors assez facilement.

↪ La question est classique et ne doit pas poser de problème particulier.

b) La forme de la question suggère qu'il faut porter une réelle attention à l'existence de l'espérance. Il s'agit bien évidemment de vérifier une convergence d'intégrale. On utilisera les méthodes habituelles sans oublier de justifier leur emploi.

↪ Il faut être très rigoureux pour l'étude de la convergence des intégrales et avoir en tête les intégrales de référence.

4) a) C'est encore une question bien classique. Bien remarquer que la variable T est discrète ; on ne doit donc pas oublier de commencer par donner son univers.

↪ La méthode de calcul liée aux parties entières doit être connue.

b) Il faut naturellement faire le lien avec la question précédente. C'est donc un moyen de contrôler vos résultats.

↪ Le calcul de cette série doit être mis en lien avec la loi de probabilité de la question précédente

5) Même s'il s'agit cette fois d'une variable à densité dont on cherche la loi, on doit commencer par en donner l'univers. Le calcul de la fonction de répartition ne devrait pas poser de problème. Veiller à donner les résultats sous forme simplifiée, et bien vérifier que la fonction obtenue satisfait aux conditions d'une fonction de répartition. Il est inutile de calculer une densité de Z.

↪ Il suffit de donner l'univers de Z et sa fonction de répartition obtenue avec la méthode usuelle.

6) a) L'étude de variables de ce type a dû être faite de nombreuses fois en classe. Encore une fois, il ne faut pas oublier de donner l'univers, de préciser le système complet d'événements choisi même si celui-ci est classique. Et on n'oubliera pas de simplifier au mieux le résultat obtenu.

↪ Une étude de la fonction $x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$ peut aider à obtenir l'univers de Y.

b) Il n'était pas obligatoire de donner une densité de Y dans la question précédente mais la résolution de cette question le nécessite. La convergence de l'intégrale définissant le moment d'ordre r est ensuite immédiate.

↪ L'existence des moments est très rapidement obtenue quand une densité de la variable est définie sur un intervalle fermé.

c) L'existence de l'espérance a été obtenue à la question précédente. Il reste le calcul. Il faut éviter l'intégration par parties qui est trop lourde. On pourra utiliser un artifice de calcul du même type que celui utilisé dans la question 2).

↪ Éviter les calculs longs quand c'est possible et penser aux méthodes suggérées tout au long de l'énoncé.

Corrigé

1) Soit X une variable aléatoire de densité f et r un entier naturel non nul.

On dit que la variable X admet un moment d'ordre r si l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)dx$$

converge. Et, en ce cas, on appelle moment d'ordre r de X le réel :

$$m_r(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)dx\,.$$

La variable X admet un moment d'ordre r si et seulement si la variable X^r admet une espérance. On a alors :

$$m_r(X) = E(X^r)\,.$$

2) Soient A et B deux réels. Pour tout $x > 0$, on a :

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{(A+B)x + A}{x(x+1)}.$$

Par conséquent :

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x > 0, \quad (A+B)x + A = 1\,.$$

Par identification des coefficients, on a :

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A = 1 \end{cases}.$$

Et ceci veut dire :

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}.$$

Donc :

$$\boxed{\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.}$$

3) a) La fonction f est continue sur $]-\infty, 1[$ et sur $[1, +\infty[$, et, pour tout $k \geq 0$, positive sur $\mathbb{R}$. Donc f sera une densité de probabilité pour tout $k \geq 0$ tel que l'intégrale :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$$

converge et soit égale à 1.Or, puisque la fonction f est nulle sur $]-\infty, 1[$, on a :

$$I = \int_{1}^{+\infty} \frac{k}{x(x+1)}dx.$$

Puisque l'on a :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1},$$

une primitive de f sur $[1, +\infty[$ est alors :

$$F(x) = k[\ln(x) - \ln(x+1)] = k\ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

On obtient donc :

$$\int_1^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} [F(x) - F(1)] .$$

Or on a :

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} k \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0.$$

D'où :

$$\int_1^{+\infty} f(t)dt = -F(1) = k\ln 2 .$$

Par conséquent, l'intégrale I converge et, en posant $k=\frac{1}{\ln 2}$, on obtient bien :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1 .$$

En conclusion :

f est une densité de probabilité si et seulement si $k=\frac{1}{\ln 2}$.

Par définition, la fonction de répartition F_X de X est donnée par :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt .$$

Puisque f est nulle sur $]-\infty, 1[$, on a alors :

$$\forall x \in]-\infty, 1[, \qquad F_X(x) = 0.$$

Pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} F_X(x) = \int_1^{x} f(t)dt &= \left[\frac{1}{\ln 2}\ln\left(\frac{t}{t+1}\right)\right]_1^x \\ &= \frac{1}{\ln 2}\left[\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\ln 2}\left[-\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \ln 2\right]. \end{aligned}$$

D'où :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{\ln 2}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

b) Par définition, X admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ converge. Or on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{1}{t+1}\right) dt .$$

On reconnaît une intégrale de Riemann divergente.

Donc X n'admet pas d'espérance.

4) a) Puisque l'on a $X(\Omega) = [1, +\infty[$, et que T est la partie entière de X, on obtient :

$$\boxed{T(\Omega) = \mathbb{N}^*.}$$

De plus, on a par définition,

$$\lfloor X \rfloor = k \iff k \leq X < k + 1.$$

Donc, pour tout entier k non nul,

$$P(T = k) = P(k \leq X < k + 1) = F_X(k + 1) - F_X(k).$$

Or on a :

$$F_X(k + 1) = 1 - \frac{1}{\ln 2} \ln\left(\frac{k + 2}{k + 1}\right).$$

De plus :

$$F_X(k) = 1 - \frac{1}{\ln 2} \ln\left(\frac{k + 1}{k}\right).$$

Donc :

$$P(T = k) = \frac{1}{\ln 2} \ln\left(\frac{(k + 1)^2}{k(k + 2)}\right).$$

Ou encore :

$$\boxed{P(T = k) = \frac{1}{\ln 2} \ln\left(1 + \frac{1}{k(k + 2)}\right).}$$

b) D'après ce qui précède, on a :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n(n + 2)}\right) = \ln 2 \, P(T = n).$$

Donc on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n(n + 2)}\right) = \ln 2 \sum_{n=1}^{+\infty} P(T = n).$$

Or,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(T = n) = 1.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n(n + 2)}\right) = \ln 2.}$$

5) On a $Z = \frac{1}{X}$, et puisque $X(\Omega) = [1, +\infty[$, on a alors $Z(\Omega) =]0, 1]$.

On obtient donc :

$$\forall x \leq 0, \quad F_Z(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x > 1, \quad F_Z(x) = 1.$$

Soit $x \in]0,1]$. On a :

$$F_Z(x) = P(Z \leq x) = P\left(\frac{1}{X} \leq x\right) = P\left(X \geq \frac{1}{x}\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{x}\right).$$

Or :

$$F_X\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{\ln 2}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right) = 1 - \frac{1}{\ln 2}\ln(x+1)\,.$$

D'où :

$$\boxed{F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x \leq 0 \\ \dfrac{1}{\ln 2}\ln(x+1) & \text{si } \ 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } \ x > 1. \end{cases}}$$

La fonction F_Z étant continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ privé de 0 et de 1, elle définit bien la fonction de répartition d'une variable à densité.

6) a) On sait que, par définition,

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad 0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1\,.$$

Par conséquent, on a :

$$Y(\Omega) = [0,1[\,.$$

On obtient donc :

$$\forall x < 0,\qquad F_Y(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \geq 1,\qquad F_Y(x) = 1.$$

Soit $x \in [0,1[$, on a :

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(X - \lfloor X \rfloor \leq x) = P(X - T \leq x).$$

On considère alors le système complet d'événements $(T = k)_{k \in \mathbb{N}^*}$.
D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$F_Y(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} P((X - T \leq x) \cap (T = k)) = \sum_{k=1}^{+\infty} P((X \leq x + k) \cap (T = k))\,.$$

Or on a vu au 4) a) que :

$$T = k \iff k \leq X < k+1.$$

On obtient donc :

$$F_Y(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} P((X \leq x + k) \cap (k \leq X < k+1))\,.$$

Et puisque $x \in [0,1[$, on a : $x + k \leq k + 1$.
Donc :

$$F_Y(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(k \leq X \leq x + k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \big(F_X(x+k) - F_X(k)\big)\,.$$

Donc :

$$F_Y(x) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} (F_X(x+k) - F_X(k)).$$

Or, pour tout $k \geq 1$, on a :

$$F_X(x+k) - F_X(k) = \frac{1}{\ln 2}[-\ln(x+k+1) + \ln(x+k) + \ln(k+1) - \ln(k)].$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, par télescopage on obtient :

$$\sum_{k=1}^{N} (F_X(x+k) - F_X(k)) = \frac{1}{\ln 2}[-\ln(x+N+1) + \ln(x+1) + \ln(N+1)].$$

Or :

$$\lim_{N\to+\infty} -\ln(x+N+1) + \ln(N+1) = \lim_{N\to+\infty} -\ln\left(1 + \frac{x}{N+1}\right) = 0.$$

D'où :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (F_X(x+k) - F_X(k)) = \frac{1}{\ln 2}\ln(x+1).$$

On a alors :

$$\boxed{F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{\ln 2}\ln(x+1) & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}}$$

Et on remarque que Y et Z suivent la même loi.

b) Soit un entier $r \geq 1$. La variable Y admet un moment d'ordre r si l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^r f_Y(x)dx$$

converge, où la fonction f_Y représente une densité de Y.

Comme toute fonction positive coïncidant avec $F_Y{}'$ là où $F_Y{}'$ existe, est une densité de Y, on obtient une densité de Y par dérivation de F_Y.

Et puisque l'on a :

$$\forall x \in]0,1[,\ F_Y'(x) = \frac{1}{\ln 2}\frac{1}{(x+1)} \quad \text{et} \quad \forall x \in]-\infty,0[\,\cup\,]1,+\infty[,\ F_Y'(x) = 0,$$

une densité de Y est donc donnée par :

$$\forall x \in]0,1[,\ f_Y(x) = \frac{1}{\ln 2}\frac{1}{(x+1)} \quad \text{et} \quad f_Y(x) = 0 \text{ sinon}.$$

L'étude de la convergence de :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^r f_Y(x)dx,$$

revient à l'étude de la convergence de :

$$\int_0^1 \frac{1}{\ln 2} \frac{x^r}{(x+1)} dx .$$

Or la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\ln 2} \frac{x^r}{(x+1)}$ est continue et positive sur $[0,1]$, donc cette intégrale converge. Par conséquent,

$$\boxed{Y \text{ admet un moment d'ordre } r \text{ pour tout entier } r \geq 1 .}$$

c) Par définition, $E(Y)$ est le moment d'ordre 1 de Y.

D'après ce qui précède, $E(Y)$ existe, et l'on a :

$$E(Y) = \int_0^1 \frac{1}{\ln 2} \frac{x}{(x+1)} dx .$$

On remarque que :

$$\forall x \in [0,1], \qquad \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1} .$$

Une primitive de cette fonction se déduit aisément de cette égalité.
On obtient alors :

$$\int_0^1 \frac{1}{\ln 2} \frac{x}{(x+1)} dx = \frac{1}{\ln 2} [x - \ln(x+1)]_0^1 = \frac{1}{\ln 2} - 1 .$$

D'où :

$$\boxed{E(Y) = \frac{1}{\ln 2} - 1 .}$$

Remarque : on vérifie aisément que $E(Y) \in [0,1[$ et ceci est en accord avec l'univers de la variable Y.

Techniques à mémoriser

♡ **Il faut se souvenir** de la condition d'existence des moments des variables aléatoires.

♡ **Il faut se souvenir** du critère de Riemann pour justifier les convergences d'intégrales.

♡ **Il faut se souvenir** de la définition de la partie entière d'un réel.

♡ **Il faut se souvenir** de donner l'univers de la variable aléatoire discrète avant de calculer sa loi.

♡ **Il faut se souvenir** que la somme des probabilités d'une variable discrète sur son univers vaut toujours 1.

♡ **Il faut se souvenir** des techniques pour obtenir la fonction de répartition d'une variable à densité, et en particulier de toujours commencer par la recherche de l'univers de la variable aléatoire.

♡ **Il faut se souvenir** de ne pas oublier de vérifier les propriétés de la fonction de répartition pour une variable à densité.

♡ **Il faut se souvenir** que la fonction $x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$ est à valeurs dans $[0, 1[$.

♡ **Il faut se souvenir** de la méthode du télescopage pour obtenir la valeur de la somme de certaines séries.

♡ **Il faut se souvenir** de simplifier les fractions pour en obtenir des primitives simples.

Formulaire

- Soit X une variable aléatoire de densité f et r un entier naturel non nul.

On dit que la variable X admet un moment d'ordre r si l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)dx$$

converge. Dans ce cas, on appelle moment d'ordre r de X le réel :

$$m_r(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)dx\,.$$

La variable X admet un moment d'ordre r si et seulement si la variable X^r admet une espérance. On a alors :

$$m_r(X) = E(X^r)\,.$$

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$

- Intégrale de référence (intégrale de Riemann)

Soit a un réel strictement positif. Soit l'intégrale I définie par :

$$I = \int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$$

L'intégrale I converge si et seulement si $\alpha > 1$.

- Une variable aléatoire Y est une variable à densité si et seulement si sa fonction de répartition F_Y est :
  - continue sur $\mathbb{R}$,
  - de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points.

Dans ce cas, toute fonction positive coïncidant avec F'_Y là où elle existe est une densité de la variable Y.

Énoncé

Soit un entier $n \geq 2$ et soit la matrice $A(a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ a_{i,i} = 0 \quad \text{et} \quad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j\ a_{i,j} = 1.$$

Calculer A^{-1}.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice assez court d'algèbre linéaire accessible aux étudiants de première année.

Il est bien évident, puisque c'est un exercice court sans préparation, qu'il ne faut pas se lancer dans la méthode d'inversion du pivot de Gauss. Il faut donc envisager une autre méthode ; celle qui consiste à obtenir un polynôme annulateur par exemple. Il y a des matrices dont on obtient assez rapidement les différentes puissances, et qu'on peut exprimer en fonction de A.
On peut, pour se donner des idées, commencer par écrire une matrice en choisissant une petite valeur pour n, et généraliser ensuite. Le jury donne souvent des indications qu'il faut écouter attentivement.

↪ Choisir une matrice simple à exprimer comme combinaison linéaire de A et I.

Corrigé

On considère la matrice $B(b_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad b_{i,j} = 1.$$

On a alors :

$$B^2 = nB,$$

et aussi :

$$B = A + I \text{ où } I \text{ désigne la matrice identité.}$$

On obtient donc :

$$(A+I)^2 = n(A+I)\,,$$

c'est-à-dire :

$$A^2 + (2-n)A = (n-1)I\,,$$

ou encore :

$$A(A + (2-n)I) = (n-1)I\,.$$

Puisque $n \geq 2$, on pose alors :

$$K = \frac{1}{n-1}(A + (2-n)I\,),$$

et on a :

$$AK = I\,.$$

Par conséquent, la matrice K est la matrice inverse de A, c'est-à-dire :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{n-1}\left(A + (2-n)I\right).}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir qu'à partir d'un polynôme annulateur, on peut généralement trouver l'expression de l'inverse d'une matrice.

♡ Il faut se souvenir des carrés de certaines matrices remarquables.

Formulaire

- Une matrice A est inversible si et seulement s'il existe une matrice K telle que l'une des égalités suivantes est vérifiée :

$$AK = I \quad \text{ou} \quad KA = I.$$