Jour n°2

Exercice 2.1

Dans cet exercice, on note C^0 l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1) Question de cours : donner la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre pour un endomorphisme.

Soit ϕ l'application sur C^0 qui à toute fonction f de C^0 associe la fonction $g = \phi(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

2) Rappeler pourquoi, pour toute fonction f de C^0, $\phi(f)$ est dérivable et expliciter sa fonction dérivée.

3) Vérifier que ϕ est un endomorphisme de C^0.

4) Donner un exemple de fonction continue sur $\mathbb{R}$ et non dérivable sur $\mathbb{R}$.
L'application ϕ est-elle surjective ? Injective ?

5) Recherche des valeurs propres λ de ϕ.
On suppose, dans cette question, que ϕ admet une valeur propre λ non nulle.
Soit f une fonction propre associée à λ. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
En dérivant la fonction $x \longmapsto f(x)e^{-\frac{x}{\lambda}}$, montrer que f ne peut être que la fonction nulle.
Que pouvez-vous en déduire pour les valeurs propres de ϕ ?

6) Pour toute fonction f de C^0, on pose $F_0 = \phi(f)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_n = \phi(F_{n-1})$.
Montrer que F_n est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$ et préciser la valeur de ses dérivées successives en 0. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\,dt.$$

Exercice 2.2

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur l'espace probabilisé (Ω, A, P) ayant pour loi de densité la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = ke^{-|x|}.$$

1) Déterminer la valeur du réel k.

2) Déterminer la fonction de répartition F de X.

3) Justifier l'existence de l'espérance et de la variance de X et les calculer.

Énoncé

Dans cet exercice, on note C^0 l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1) Question de cours : donner la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre pour un endomorphisme.

Soit ϕ l'application sur C^0 qui à toute fonction f de C^0 associe la fonction $g = \phi(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

2) Rappeler pourquoi, pour toute fonction f de C^0, $\phi(f)$ est dérivable et expliciter sa fonction dérivée.

3) Vérifier que ϕ est un endomorphisme de C^0.

4) Donner un exemple de fonction continue sur $\mathbb{R}$ et non dérivable sur $\mathbb{R}$.
L'application ϕ est-elle surjective ? Injective ?

5) Recherche des valeurs propres λ de ϕ.
On suppose, dans cette question, que ϕ admet une valeur propre λ non nulle.
Soit f une fonction propre associée à λ. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

En dérivant la fonction $x \longmapsto f(x)e^{-\frac{x}{\lambda}}$, montrer que f ne peut être que la fonction nulle.
Que pouvez-vous en déduire pour les valeurs propres de ϕ ?

6) Pour toute fonction f de C^0, on pose $F_0 = \phi(f)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_n = \phi(F_{n-1})$.
Montrer que F_n est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$ et préciser la valeur de ses dérivées successives en 0. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n\,!} f(t)\,dt.$$

Analyse stratégique de l'énoncé

L'exercice qui, en lui-même, n'est pas difficile déroute souvent les candidats qui n'ont pas l'habitude de ce type de recherche des éléments propres des endomorphismes.

1) Cette question de cours est donnée assez souvent. Il faut y répondre avec toute la rigueur nécessaire.
↪ Apprendre le cours avec une grande précision.

2) C'est une question de cours à peine déguisée. Il ne faut simplement pas oublier les justifications précises.
↪ La rigueur et la précision sont deux qualités qui sont évaluées à l'oral.

3) La question est usuelle ; on vérifie en premier lieu la linéarité puis on regarde les ensembles de départ et d'arrivée.
↪ L'ordre dans lequel on donne les justifications n'est pas anodin. Il faut y apporter grand soin.

4) Il faut avoir en mémoire un certain nombre d'exemples et contre-exemples usuels. Celui-là en fait partie. Le fait qu'il soit explicitement demandé est en soi une indication pour répondre à la question suivante. Faire bien attention aux quantificateurs dans les démonstrations d'injection et surjection.
↪ **Une bonne lecture du texte est une aide précieuse à la résolution. Il faut avoir lu le sujet en entier avant de commencer la recherche, et bien relire l'intégralité de la question qu'on veut résoudre.**

5) Même si l'on ne voit pas tout de suite ce qu'on va obtenir, il faut suivre les indications du texte. La façon dont est posée la question, suggère une démonstration par l'absurde. Ne pas oublier non plus les résultats obtenus à la question précédente.
↪ **Les différents résultats demandés sont toujours une aide à la résolution. Il ne faut simplement pas perdre de vue ce qu'on souhaite obtenir.**

6) L'ensemble de la question doit rappeler un théorème connu dont on vous fait d'abord vérifier les hypothèses.
↪ **Il est souvent utile de calculer au brouillon les premières valeurs. Cela donne une idée des résultats et permet de choisir le type de démonstration qu'on va effectuer.**

Corrigé

1) Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E.

Soit λ un réel. λ est une valeur propre de f si et seulement si il existe un vecteur non nul u de E tel que $f(u) = \lambda u$.
Soit $u \in E$ un vecteur non nul, u est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ si et seulement si $f(u) = \lambda u$.

2) Puisque f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $g = \phi(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ g(x) = \int_0^x f(t)\, dt .$$

est, par définition, la primitive de f qui s'annule en 0.

Donc g est dérivable et on a :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g'(x) = f(x).}$$

3) Montrons que ϕ est linéaire.

Soient a et b deux réels, soient f et g deux fonctions de C^0. La fonction h égale à $\phi(af + bg)$ est, par hypothèse, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad h(x) = \int_0^x (af + bg)(t) dt .$$

Des propriétés des intégrales sur un segment, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad h(x) = a \int_0^x f(t) dt + b \int_0^x g(t) dt .$$

Donc :

$$\phi(af+bg)=a\phi(f)+b\phi(g),$$

c'est-à-dire :

$$\phi \text{ est linéaire.}$$

De plus, d'après 2), on a vu que $\phi(f)$ est dérivable donc elle est continue ; par conséquent $\phi(f)$ appartient à C^0, et donc :

$$\boxed{\phi \text{ est un endomorphisme de } C^0.}$$

4) Soit la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \psi(x)=|x|\,.$$

Elle est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle n'est pas dérivable en 0.

La fonction ϕ est surjective si et seulement si :

$$\forall g \in C^0, \qquad \exists f \in C^0, \qquad g=\phi(f).$$

Or, d'après 2),

$$\text{si } g=\phi(f) \text{ alors } g \text{ est dérivable.}$$

De plus, ψ est une fonction de C^0 qui n'est pas dérivable, donc elle n'a pas d'antécédent par f. Par conséquent :

$$\boxed{\phi \text{ n'est pas surjective.}}$$

La fonction ϕ est injective si et seulement si :

$$\forall (f_1,f_2) \in (C^0)^2, \quad \phi(f_1)=\phi(f_2) \Rightarrow f_1=f_2\,.$$

Soit $(f_1,f_2) \in (C^0)^2$ tel que $\phi(f_1)=\phi(f_2)$, on a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \int_0^x f_1(t)dt=\int_0^x f_2(t)dt\,,$$

donc, par dérivation,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f_1(x)=f_2(x)\,,$$

c'est-à-dire :

$$f_1=f_2\,,$$

et donc :

$$\boxed{\phi \text{ est injective.}}$$

Remarque : ici l'application ϕ étant linéaire, on aurait pu aussi utiliser l'équivalence :

$$\phi \text{ est injective} \Leftrightarrow \ker\phi=\{\vec{0}\}\,.$$

Or, on a :

$$f \in \ker\phi \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \int_0^x f(t)\,dt=0.$$

De même que précédemment, on obtient que f est la fonction nulle et donc $\ker\phi=\{\vec{0}\}$.

5) Soit λ une valeur propre non nulle de ϕ, et f une fonction propre associée à λ.

Donc f est une fonction non nulle telle que $\phi(f) = \lambda f$.

Par conséquent, par linéarité de ϕ, on a :

$$\phi\left(\frac{1}{\lambda}f\right) = f.$$

Et puisque $\phi\left(\frac{1}{\lambda}f\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, d'après 2), alors :

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.}$$

Soit la fonction h définie par :

$$(1) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad h(x) = f(x)e^{-\frac{x}{\lambda}}.$$

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$(2) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad h'(x) = f'(x)e^{-\frac{x}{\lambda}} + \left(-\frac{1}{\lambda}\right)f(x)e^{-\frac{x}{\lambda}}.$$

Puisque f est une fonction propre associée à λ, alors $\phi(f) = \lambda f$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \int_0^x f(t)dt = \lambda f(x).$$

En dérivant cette relation, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \lambda f'(x).$$

L'égalité (2) devient alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad h'(x) = 0.$$

La fonction h est donc constante.

Soit k cette constante. De l'égalité (1), on tire alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = ke^{\frac{x}{\lambda}}.$$

Puisque $\phi(f) = \lambda f$ et puisque, d'après 2), $\phi(f)$ s'annule en 0, alors on obtient :

$$f(0) = 0 \text{ et donc } k = 0 ,$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{f \text{ est la fonction nulle.}}$$

On vient de montrer que si λ est une valeur propre non nulle de ϕ, alors les seules fonctions propres qui lui sont associées sont les fonctions nulles, ce qui contredit l'hypothèse.

Par conséquent la seule valeur propre possible est 0, mais, d'après 4), ϕ est injective donc 0 n'est pas non plus valeur propre de ϕ.

$$\boxed{\text{Donc } \phi \text{ n'admet aucune valeur propre.}}$$

6) Montrons par récurrence sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n \text{ est de classe } C^{n+1} \text{ et } F_n(0) = 0.$$

Initialisation

On a $F_0 = \phi(f)$, c'est-à-dire que F_0 est la primitive de f qui s'annule en 0.

Par conséquent, F_0 est dérivable de dérivée f donc de dérivée continue. La fonction F_0 est donc de classe C^1 et, de plus, on a : $F_0(0) = 0$.

Hérédité

On suppose que pour un entier n fixé non nul, on a :

$$F_{n-1} \text{ est de classe } C^n \text{ et } F_{n-1}(0) = 0.$$

On a alors :

$$F_n = \phi(F_{n-1}).$$

D'où :

$$F_n \text{ est la primitive de } F_{n-1} \text{ qui s'annule en } 0.$$

Donc F_n est dérivable de dérivée F_{n-1}, c'est-à-dire :

$$F_n \text{ est de classe } C^{n+1} \text{ et } F_n(0) = 0.$$

Donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n \text{ est de classe } C^{n+1} \text{ et } F_n(0) = 0.}$$

Puisqu'on a démontré que F_n est la primitive de F_{n-1} qui s'annule en 0, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad F_{n-1} \text{ est la dérivée de } F_n.$$

En itérant le procédé, on a :

$$\forall n \geq k, \quad F_{n-k} \text{ est la dérivée } k^{ième} \text{ de } F_n.$$

Et puisque :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n(0) = 0,$$

on en déduit que les dérivées successives de F_n sont toutes nulles en 0.

Puisque F_n est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer la formule de Taylor à l'ordre n :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k\,!} F_n^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n\,!} F_n{}^{(n+1)}(t)dt\,.$$

Or, d'après ce qui précède, les dérivées successives de F_n sont toutes nulles en 0, et de plus la dérivée $(n+1)^{ième}$ de F_n est la dérivée de F_0 , c'est-à-dire f, on obtient donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n\,!} f(t)dt\,.}$$

Techniques à mémoriser

♡ **Il faut se souvenir** de l'utilisation des contre-exemples pour démontrer qu'une application linéaire n'est pas surjective.

♡ **Il faut se souvenir** que le vecteur nul n'est pas un vecteur propre même s'il appartient au sous-espace propre.

♡ **Il faut se souvenir** de la méthode de démonstration par l'absurde.

♡ **Il faut se souvenir** qu'une fonction dont la dérivée est identiquement nulle est une fonction constante.

♡ **Il faut se souvenir** des différentes égalités de Taylor, de leurs hypothèses et de leur utilisation.

♡ **Il faut se souvenir** de la méthode de démonstration par récurrence.

Formulaire

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, λ est une valeur propre de f si et seulement s'il existe un vecteur $u \in E$ non nul tel que $f(u) = \lambda u$.

Soit $u \in E$ un vecteur non nul, u est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ si et seulement si $f(u) = \lambda u$.

- Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On considère la fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

La fonction g est la primitive de f qui s'annule en 0.

- Une fonction $\phi: E \to F$ est surjective si et seulement si :

$$\forall g \in F, \qquad \exists f \in E, \qquad g = \phi(f).$$

- Une fonction $\phi: E \to F$ est injective si et seulement si :

$$\forall (f, g) \in E^2 \;\; \phi(f) = \phi(g) \Rightarrow f = g.$$

- Une application linéaire $\phi: E \to F$ est :
  - injective si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul.
  - surjective si et seulement si son image est égale à F.

- Formule de Taylor

Soit f une fonction de classe C^{p+1} sur un intervalle I. Pour tout $(a, b) \in I^2$ on a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)dt.$$

Énoncé

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur l'espace probabilisé (Ω, A, P) ayant pour loi de densité la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = ke^{-|x|}.$$

1) Déterminer la valeur du réel k.

2) Déterminer la fonction de répartition F de X.

3) Justifier l'existence de l'espérance et de la variance de X et les calculer.

Analyse stratégique de l'énoncé

Cet exercice est très classique. Il ne nécessite que la bonne connaissance du cours. La seule difficulté réside dans la valeur absolue. Il suffit donc de se placer successivement dans $\mathbb{R}^+$ et dans $\mathbb{R}^-$ pour les calculs.

1) Il suffit ici d'écrire les conditions que doit vérifier la fonction f puis de résoudre l'équation obtenue.
↪ Les trois propriétés que doit posséder une fonction pour être considérée comme une densité doivent être parfaitement connues.

2) Si l'on connait le lien entre densité et fonction de répartition, cette question se résume en un calcul intégral bien simple. Mais il faudra faire attention à se placer successivement sur $\mathbb{R}^+$ et sur $\mathbb{R}^-$.
↪ Attention à vérifier rapidement la continuité de la fonction obtenue pour éviter de laisser des erreurs éventuelles de calcul au tableau.

3) La question se résout en deux temps : tout d'abord la justification d'existence pour laquelle on utilise les critères usuels de convergence des intégrales, puis le calcul des moments de la variable. Il faut penser à utiliser les résultats concernant les lois exponentielles afin d'éviter des calculs fastidieux.
↪ Toujours éviter de se précipiter dans les calculs. Quand il existe plusieurs manières d'arriver au résultat, utiliser une méthode courte et élégante peut faire la différence.

Corrigé

1) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est positive sur $\mathbb{R}$ dès que $k \geq 0$.
On considère l'intégrale :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt\,.$$

La fonction f définit alors une densité de probabilité dès que l'intégrale I converge et vaut 1.

On remarque que la fonction f est paire, donc l'intégrale I converge si et seulement si l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt$$

converge. Et, dans ce cas, on a :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 2\int_0^{+\infty} f(t)dt.$$

De plus, en considérant la densité d'une variable de loi exponentielle de paramètre 1, on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1.$$

Et puisque :

$$\forall x \geq 0,\ f(x) = ke^{-x},$$

alors :

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = k.$$

Donc :

L'intégrale I converge et vaut $2k$.

Par conséquent, la fonction f définit une densité de probabilité si et seulement si $2k = 1$.
D'où :

$$\boxed{k = \frac{1}{2}.}$$

Et on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

2) Par définition, la fonction de répartition F de X est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt\,.$$

Si $x < 0$, on a :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^t dt = \frac{1}{2}e^x.$$

Si $x \geq 0$, on a :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}e^t\,dt + \int_0^x \frac{1}{2}e^{-t}dt = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}.$$

En conclusion :

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.}$$

3) Par définition, l'espérance de X existe si et seulement si l'intégrale J définie par :

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$$

converge. Et, dans ce cas, on a :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt.$$

On remarque que la fonction $t \longmapsto tf(t)$ est impaire, donc J converge si et seulement si :

$$\int_{0}^{+\infty} tf(t)dt$$

converge, et, dans ce cas, on aura : $J = 0$.

Or, sur $\mathbb{R}^+$, la fonction $t \longmapsto tf(t)$ est continue, positive. De plus, puisque :

$$\lim_{t \to +\infty} t^2 \times tf(t) = 0\,,$$

la fonction $t \longmapsto tf(t)$ est négligeable en $+\infty$ devant la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$. De la convergence de l'intégrale de Riemann :

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2},$$

on tire la convergence de :

$$\int_{0}^{+\infty} tf(t)dt\,.$$

et donc celle de J ; par conséquent :

$$\boxed{E(X) \text{ existe et vaut } 0.}$$

La variance de X existe si et seulement si le moment d'ordre 2 existe, c'est-à-dire si et seulement si l'intégrale :

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt$$

converge. On aura alors :

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt\,,$$

et :

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X).$$

On remarque que la fonction $t \longmapsto t^2 f(t)$ est paire donc K converge si et seulement si :

$$\int_{0}^{+\infty} t^2 f(t)dt$$

converge. Et dans ce cas on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt = 2\int_{0}^{+\infty} t^2 f(t)dt\,.$$

Or, sur $\mathbb{R}^+$, la fonction $t \mapsto t^2 f(t)$ est continue, positive.

De plus, puisque l'on a :

$$\lim_{t \to +\infty} t^2 \times t^2 f(t) = 0\,,$$

la fonction $t \longmapsto t^2 f(t)$ est négligeable en $+\infty$ devant la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$. De la convergence de l'intégrale de Riemann :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2},$$

on tire la convergence de :

$$\int_0^{+\infty} t^2 f(t) dt\,,$$

et donc celle de K par conséquent, $E(X^2)$ existe et vaut :

$$E(X^2) = 2\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt\,.$$

On calcule cette intégrale.

On pourrait effectuer une double intégration par parties mais on remarque que si l'on note T une variable qui suit la loi exponentielle de paramètre 1 alors :

$$E(T^2) = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt\,.$$

Et puisque l'on a :

$$V(T) = E(T^2) - E^2(T)\,,$$

avec $V(T) = E(T) = 1$, on obtient :

$$E(T^2) = 2 \text{ et donc } E(X^2) = 4\,.$$

Par conséquent :

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - E^2(X) = 4\,.}$$

Techniques à mémoriser

♡ **Il faut se souvenir** que lorsqu'une fonction dépend d'une valeur absolue, il ne faut pas oublier de l'étudier séparément sur $\mathbb{R}^+$ et sur $\mathbb{R}^-$.

♡ **Il faut se souvenir** que pour éviter des calculs, on peut utiliser des résultats concernant les lois exponentielles.

♡ **Il faut se souvenir** que l'utilisation d'un critère de négligeabilité pour démontrer la convergence d'une intégrale est soumise à la condition de positivité de la fonction.

♡ **Il faut se souvenir** que si la fonction qu'on intègre est paire ou impaire, alors la convergence de l'intégrale au voisinage de $-\infty$ se déduit de celle au voisinage de $+\infty$.

♡ **Il faut se souvenir** que si une variable aléatoire admet une densité paire, alors son espérance, si elle existe, est nulle. Il suffit alors uniquement de montrer la convergence de l'intégrale sur $\mathbb{R}^+$.

♡ **Il faut se souvenir** qu'on utilise le plus souvent le théorème de Köenig-Huygens pour le calcul de la variance. Mais il ne faut pas oublier la définition de la variance ainsi que sa condition d'existence, et en particulier celle liée à l'existence du moment d'ordre 2. De plus, lorsqu'une variable est centrée, sa variance est égale à son moment d'ordre 2.

Formulaire

- Une fonction f définit une densité de probabilité, si et seulement si :
  - elle est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points,
  - elle est positive sur $\mathbb{R}$,
  - l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1.

- La fonction de répartition d'une variable aléatoire X de densité f est la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

- L'espérance d'une variable aléatoire X de densité f existe si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ converge et dans ce cas :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt.$$

- La variance de X existe si et seulement si le moment d'ordre 2 existe, c'est-à-dire si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt$ converge. On aura alors :

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt \quad \text{et} \quad V(X) = E(X^2) - E^2(X).$$

- Si une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ alors, elle admet des moments à tous ordres et on a :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad E(X^n) = \frac{n!}{\lambda^n}.$$