Jour n°5

Exercice 5.1

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On pose $N = A - I$ et $M = N^2 - N$, où I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Soient u et v les deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ associés canoniquement aux deux matrices N et M.

1) Question de cours : matrices semblables, définitions et propriétés.

2) Donner les éléments propres de A, on précisera la dimension des sous-espaces propres. La matrice A est-elle diagonalisable ?

3) Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de I et de M.

4) On suppose dans cette question que le rang de u est égal à 2.

a) Montrer l'existence d'un vecteur x de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathcal{B} = (u^2(x), u(x), x)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$. En déduire que N est semblable à L où L est donnée par :

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Exprimer la matrice de v dans la base $\mathcal{B}$ et en déduire que M et N sont semblables.

c) Conclure que A et A^{-1} sont aussi semblables.

Exercice 5.2

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $a > 0$. On désigne l'espérance d'une variable aléatoire par E.

1) Justifier l'existence puis calculer la valeur de :

$$E\left(\frac{1}{1+X}\right).$$

2) Montrer que :

$$E\left(\frac{1}{1+X}\right) \leq 1 .$$

Énoncé

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On pose $N = A - I$ et $M = N^2 - N$, où I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Soient u et v les deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ associés canoniquement aux deux matrices N et M.

1) <u>Question de cours :</u> matrices semblables, définitions et propriétés.

2) Donner les éléments propres de A, on précisera la dimension des sous-espaces propres. La matrice A est-elle diagonalisable ?

3) Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de I et de M.

4) On suppose dans cette question que le rang de u est égal à 2.

a) Montrer l'existence d'un vecteur x de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathcal{B} = (u^2(x), u(x), x)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$. En déduire que N est semblable à L où L est donnée par :

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Exprimer la matrice de v dans la base $\mathcal{B}$ et en déduire que M et N sont semblables.

c) Conclure que A et A^{-1} sont aussi semblables.

Analyse stratégique de l'énoncé

Cet exercice vise à démontrer que toute matrice A du type donné, est inversible et semblable à sa matrice inverse.

1) Les propriétés de la similitude des matrices sont souvent mal connues. Il ne faut pas non plus oublier le lien entre endomorphisme et matrices semblables.
↪ Bien faire apparaître les liens matrices-endomorphismes qui seront utiles dans la suite de l'exercice.

2) Il faut procéder par ordre : valeurs propres puis sous-espaces propres. La recherche des valeurs propres est immédiate et seuls les sous-espaces propres dépendent des paramètres. Il faut être très soigneux dans l'étude des différents cas.
↪ Écrire avec soin les vecteurs propres et étudier les cas.

3) Si l'on connaît bien les conditions d'inversibilité d'une matrice, montrer que A est inversible ne pose pas de problème. En revanche, l'expression de A^{-1} demande plus de réflexion. Il faut noter qu'on demande le résultat en fonction de I et M. Il semble donc logique d'expliciter N et de calculer N^2 puisqu'on a $M = N^2 - N$. Ensuite les connaissances des propriétés de certaines matrices un peu particulières devraient permettre de trouver une relation entre les puissances de A, puis d'exprimer cela en fonction des matrices I et M.

↪ Faire le lien entre A, I et M pour trouver A^{-1}.

4) a) Cette question est délicate. Pour se donner des idées sur ce vecteur x, on peut examiner le résultat souhaité, c'est-à-dire l'expression de u dans la base $\mathcal{B}$. On aura ainsi les images des vecteurs de base par u et donc, en tenant compte du fait que le rang de u vaut 2, avoir quelques idées sur les ensembles auxquels x peut appartenir. Naturellement, cette recherche s'effectue au brouillon, les résultats seront ensuite présentés avec rigueur. Il ne faudra pas oublier de montrer que les trois vecteurs obtenus forment une base. Pour montrer que les matrices sont semblables, on tient ensuite compte du lien entre endomorphisme et matrices. Il faut aussi se souvenir qu'on vous a indiqué une base spécifique.

↪ Trouver ce qui caractérise x, montrer qu'on a une base puis justifier la similitude de la matrice.

b) Le calcul des images des vecteurs de base par v n'est pas très difficile, on obtient donc rapidement la matrice cherchée. Il faut, bien sûr, faire le lien entre le résultat obtenu et les questions précédentes, notamment les résultats du 4) a).

↪ La recherche de la matrice est une indication en soi.

c) On connaît l'expression de A en fonction de I et N, on a cherché celle de A^{-1} en fonction de I et M. Le résultat du 4) b) doit permettre d'achever le raisonnement.

↪ Toujours faire le lien entre les différentes questions.

Corrigé

1) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A et B sont semblables si et seulement s'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que :

$$B = P^{-1}AP.$$

Une telle relation entre les matrices s'appelle similitude matricielle.

Cette relation est :

- réflexive (toute matrice est semblable à elle-même),
- symétrique (si A est semblable à B alors B est semblable à A),
- transitive (si A est semblable à B et B semblable à C alors A est semblable à C).

Soit u un endomorphisme sur un espace vectoriel E.

Soient A et B deux matrices représentant u dans deux bases différentes de E. Alors A et B sont semblables.

2) La matrice A est triangulaire, ses valeurs propres sont donc sur sa diagonale. Donc :

$$\boxed{1 \text{ est l'unique valeur propre de } A.}$$

On cherche ensuite $E_1 = \ker(A - I)$, le sous-espace propre associé à la valeur propre 1.

Or un vecteur $X(x, y, z)$ appartient à E_1 si et seulement si $\begin{cases} ay + bz = 0 \\ cz = 0 \end{cases}$.

On obtient les résultats suivants.

> Si $c = 0$ et $a = b = 0$ alors $E_1 = \mathbb{R}^3$ et $\dim E_1 = 3$.
> Si $c = 0$ et $(a, b) \neq (0,0)$ alors $E_1 = \{(x, y, z) / \ ay + bz = 0\}$ et $\dim E_1 = 2$.
> Si $c \neq 0$ et $a \neq 0$ alors $E_1 = \{(x, 0,0) \ / \ x \in \mathbb{R}\}$ et $\dim E_1 = 1$.
> Si $c \neq 0$ et $a = 0$ alors $E_1 = \{(x, y, 0) \ / \ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ et $\dim E_1 = 2$.

On sait que A est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace.
On obtient alors :

> Si $a = b = c = 0$ alors A est diagonalisable (A est la matrice identité).
> Dans tous les autres cas A n'est pas diagonalisable.

Remarque : on aurait pu utiliser le résultat suivant.
Si une matrice A n'a qu'une valeur propre λ, elle n'est diagonalisable que si $A = \lambda I$.

3) On sait qu'une matrice est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de cette matrice. Or 1 est l'unique valeur propre de A, donc :

$$\boxed{A \text{ est inversible.}}$$

Par définition, on a :

$$N = A - I = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donc :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ et } N^3 = [0].$$

On obtient donc :

$$(A - I)^3 = [0].$$

Puisque A et I commutent, on peut utiliser la formule du binôme, donc :

$$A^3 - 3A^2 + 3A - I = [0],$$

d'où :

$$A(A^2 - 3A + 3I) = I,$$

et donc :

$$A^{-1} = A^2 - 3A + 3I\,.$$

Puisque, par hypothèse,

$$M = N^2 - N \text{ et } N = A - I,$$

on a alors :

$$M = (A - I)^2 - (A - I) = A^2 - 3A + 2I.$$

On obtient donc :

$$\boxed{A^{-1} = M + I\,.}$$

4) **a)** Par hypothèse, u est un endomorphisme de matrice $N = A - I$ et, de plus on a supposé que u est de rang 2. On a donc :

$$\dim \operatorname{Im}(A - I) = 2.$$

D'après le théorème du rang, on a :

$$\dim \ker(A - I) = \dim \mathbb{R}^3 - 2 = 1\,.$$

Or :

$$\ker(A - I) = E_1\,,$$

Donc :

$$\dim E_1 = 1.$$

D'après 2), le seul cas où l'on obtient $\dim E_1 = 1$, est le cas où l'on a $a \neq 0$ et $c \neq 0$, c'est-à-dire $ac \neq 0$. On a alors $N^2 \neq [0]$ et donc u^2 est non nul.

Par conséquent :

$$\exists x \in \mathbb{R}^3,\quad u^2(x) \neq 0\,.$$

Et donc nécessairement :

$$u(x) \neq 0 \text{ et } x \neq 0.$$

Montrons alors que le système $(u^2(x), u(x), x)$ est un système libre.

On considère trois réels (α, β, γ) tels que :

$$(1) \qquad \alpha u^2(x) + \beta u(x) + \gamma x = 0.$$

Montrons que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

On remarque que, puisque $N^3 = [0]$, on a :

$$\forall n \geq 3,\quad u^n(x) = 0.$$

On compose la relation (1) avec u^2, on obtient alors par linéarité :

$$\gamma u^2(x) = 0.$$

Puisque $u^2(x) \neq 0$ alors :

$$\gamma = 0.$$

La relation (1) devient alors :

$$\alpha u^2(x) + \beta u(x) = 0.$$

On réitère le procédé, on compose avec u, et on obtient de la même manière successivement $\beta = 0$ puis $\alpha = 0$.

Le système $(u^2(x), u(x), x)$ est donc un système libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui un espace de dimension trois, ce système forme donc une base de $\mathbb{R}^3$.

Pour obtenir la matrice de l'endomorphisme dans cette base, il suffit de connaître les images des vecteurs de la base. Or on a :

$$u\big(u^2(x)\big) = 0, \; u\big(u(x)\big) = u^2(x) \; .$$

La matrice de u dans cette base est donc :

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque N est la matrice de u dans la base canonique, ces deux matrices sont donc semblables.

b) On calcule les images par v des vecteurs de la base, en utilisant le fait que :

$$v = u^2 - u \, .$$

On obtient par linéarité :

$$v\big(u^2\,(x)\big) = u^4(x) - u^3(x) = 0 \, ,$$

$$v\big(u(x)\big) = u^3(x) - u^2(x) = -u^2(x) \, ,$$

$$v(x) = u^2(x) - u(x).$$

La matrice de v est donc :

$$\boxed{K = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

On a vu à la question 4) a) que :

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \text{ tel que } ac \neq 0, \; N \text{ est semblable à } L.$$

Et ce résultat est valable en particulier pour :

$$a = -1, \; b = 1, \; c = -1 \, ,$$

donc on a :

$$K \text{ est semblable à } L \, .$$

D'autre part, M et K représentent le même endomorphisme v dans deux bases différentes, donc M et K sont semblables.

Par transitivité de la similitude des matrices, on a :

$$\boxed{M \text{ est semblable à } N.}$$

c) Par définition, les matrices M et N étant semblables, il existe une matrice P, inversible, telle que :

$$N = P^{-1}MP.$$

Or on a :

$$A = N + I,$$

Donc :

$$A = P^{-1}MP + I = P^{-1}(M + I)P.$$

D'après 3) on sait que :

$$A^{-1} = M + I,$$

Donc :

$$A = P^{-1}A^{-1}P.$$

Et ceci signifie que :

$$\boxed{A \text{ et } A^{-1} \text{ sont semblables.}}$$

Techniques à mémoriser

♡ **Il faut se souvenir** que les matrices représentant un même endomorphisme dans deux bases différentes sont semblables.

♡ **Il faut se souvenir** qu'une matrice triangulaire a ses valeurs propres sur sa diagonale.

♡ **Il faut se souvenir** que la seule condition nécessaire et suffisante pour montrer qu'une matrice non diagonale est diagonalisable est que la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace. Il faut aussi bien connaître les conditions suffisantes.

♡ **Il faut se souvenir** qu'il y a beaucoup de manières de montrer qu'une matrice est inversible ; entre autres, on peut montrer que 0 n'est pas valeur propre de la matrice. De plus pour trouver l'inverse d'une matrice, on peut parfois utiliser les relations entre les différentes puissances de cette matrice.

♡ **Il faut se souvenir** qu'on peut utiliser le théorème du rang pour trouver la dimension des sous-espaces propres.

♡ **Il faut se souvenir** qu'il y a deux conditions pour montrer qu'un système de vecteurs est une base :

- soit on montre qu'il est libre et générateur ;
- soit on montre qu'il est libre et qu'il comporte le même nombre de vecteurs que la dimension de l'espace ;
- soit on montre qu'il est générateur et qu'il comporte le même nombre de vecteurs que la dimension de l'espace.

Dans les deux derniers cas, cela suppose naturellement que la dimension de l'espace est connue.

♡ **Il faut se souvenir** que si une matrice A n'a qu'une valeur propre λ, elle n'est diagonalisable que si elle est scalaire, c'est-à-dire : $A = \lambda I$.

Formulaire

- Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit que A et B sont semblables si et seulement s'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que :

$$B = P^{-1}AP .$$

Une telle relation entre les matrices s'appelle similitude matricielle.

Cette relation est :
- réflexive (toute matrice est semblable à elle-même),
- symétrique (si A est semblable à B, alors B est semblable à A)
- transitive (si A est semblable à B et B semblable à C, alors A est semblable à C).

Soit u un endomorphisme sur un espace vectoriel E.
Soient A et B deux matrices représentant u dans deux bases différentes de E. Alors A et B sont semblables.

- Soit λ une valeur propre d'une matrice A, le sous-espace propre associé à λ est défini par :

$$E_\lambda = \ker(A - \lambda I) .$$

- <u>Théorème du rang</u>

  Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ où E est de dimension finie. On a :

$$\dim(E) = \dim(\ker u) + \dim(\operatorname{Im} u) .$$

- Une matrice B est l'inverse d'une matrice A si et seulement si $AB = BA = I$.

Énoncé

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $a > 0$. On désigne l'espérance d'une variable aléatoire par E .

1) Justifier l'existence puis calculer la valeur de :

$$E\left(\frac{1}{1+X}\right).$$

2) Montrer que :

$$E\left(\frac{1}{1+X}\right) \leq 1.$$

Analyse stratégique de l'énoncé

Cette question simple qui suit un exercice difficile vise à évaluer si les techniques de bases sont connues.

1) Bien remarquer qu'on ne vous demande pas autre chose qu'un calcul d'espérance d'une variable aléatoire discrète. La justification d'existence n'est donc que la justification de la convergence d'une série, ce qu'il faudra faire avec toute la rigueur nécessaire. On va donc, à l'aide du théorème de transfert, examiner le terme général de la série pour cette justification, le calcul de la somme découlera ensuite de l'expression trouvée.

↪ Utiliser le théorème de transfert pour obtenir l'expression de l'espérance, la justification d'existence précédant toujours le calcul de la somme de la série.

2) L'inégalité demandée ne devrait en principe pas poser de problème ; il y a plusieurs méthodes pour l'obtenir.

↪ L'utilisation de la convexité de la fonction exponentielle ou l'utilisation du théorème de majoration des séries sont des méthodes classiques.

Corrigé

1) Puisque X suit la loi de Poisson de paramètre a, on a :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad P(X = k) = e^{-a}\frac{a^k}{k!}.$$

D'après le théorème de transfert, l'espérance $E\left(\frac{1}{1+X}\right)$ existe si et seulement la série de terme général :

$$\frac{1}{1+k}P(X = k).$$

converge absolument. Et, dans ce cas, cette espérance est la valeur de la somme de la série.

Or il s'agit ici d'une série à termes positifs, la convergence absolue équivaut à la convergence et on peut, pour justifier cette convergence, utiliser un critère de majoration.

On a :

$$\forall k \geq 0, \qquad \frac{1}{1+k} \leq 1.$$

Donc :

$$\forall k \geq 0, \qquad \frac{1}{1+k} P(X=k) \leq P(X=k).$$

Or, la série de terme général $P(X=k)$ converge,
donc la série de terme général $\frac{1}{1+k} P(X=k)$ converge.
D'où :

$$\boxed{E\left(\frac{1}{1+X}\right) \text{ existe.}}$$

On obtient alors :

$$\forall k \geq 0, \qquad \frac{1}{1+k} P(X=k) = e^{-a} \frac{a^k}{(k+1)!}\ .$$

D'où :

$$E\left(\frac{1}{1+X}\right) = \sum_{k\geq 0} e^{-a} \frac{a^k}{(k+1)!} = \frac{e^{-a}}{a} \sum_{k\geq 1} \frac{a^k}{k\,!}.$$

Or on sait que :

$$\sum_{k\geq 0} \frac{a^k}{k\,!} = e^a\ .$$

D'où :

$$E\left(\frac{1}{1+X}\right) = \frac{e^{-a}}{a}(e^a - 1)\ .$$

Donc :

$$\boxed{E\left(\frac{1}{1+X}\right) = \frac{1}{a}(1 - e^{-a}).}$$

2) Par convexité de la fonction exponentielle ou par une étude rapide de fonction, on a l'inégalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^x \geq 1 + x\ .$$

Donc :

$$1 - e^{-a} \leq a\ .$$

D'où :

$$\boxed{E\left(\frac{1}{1+X}\right) \leq 1.}$$

Remarque : on aurait aussi pu utiliser le fait que :

$$\forall k \geq 0, \qquad \frac{1}{1+k} P(X=k) \leq P(X=k).$$

Et donc :

$$\sum_{k\geq 0} \frac{1}{1+k} P(X=k) \leq \sum_{k\geq 0} P(X=k)\,,$$

ce qui fournit le résultat.

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de la méthode d'utilisation du théorème du transfert. On se souviendra en particulier que ce théorème ne justifie pas l'existence de l'espérance.

♡ Il faut se souvenir lors de l'utilisation des critères de convergence des séries, qu'il faut auparavant montrer que ce sont des séries à termes positifs.

♡ Il faut se souvenir qu'un certain nombre d'inégalités sont obtenues par convexité.

Formulaire

- Théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire discrète, et f une fonction définie sur $X(\Omega) = \{x_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$.

Alors la variable $Y = f(X)$ est une variable aléatoire discrète qui admet une espérance si et seulement si la série de terme général $f(x_n)P(X = x_n)$ est absolument convergente.

Dans ce cas, l'espérance de Y est donnée par :

$$E(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)P(X = x_n).$$

- Critères de convergence des séries à termes positifs

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.

1) Si, à partir d'un certain rang, on a $u_n \leq v_n$, alors :
   a) si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge ;
   b) si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

2) Si, au voisinage de $+\infty$, on a $u_n = o(v_n)$ alors :
   a) si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge ;
   b) si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

3) Si, au voisinage de $+\infty$, on a $u_n \sim v_n$ alors les deux séries sont de même nature.

- Série exponentielle

$$\sum_{k\geq 0} \frac{a^k}{k\,!} = e^a .$$

- La fonction exponentielle est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$. Elle est donc au-dessus de ses tangentes en tous ses points. En particulier en 0, on obtient donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^x \geq 1 + x .$$