Jour n°6

Exercice 6.1

Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite, soit φ sa densité de probabilité et ϕ sa fonction de répartition. On admet que X admet des moments de tous ordres.

On note f la densité d'une loi exponentielle de paramètre 1. On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = -\ln(1-\phi(x))$ et la variable aléatoire $Y = g(X)$.

1) Question de cours : définition et propriétés de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

2) Montrer que ϕ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$. On notera ϕ^{-1} l'application réciproque.

3) Calculer la fonction de répartition de Y et reconnaître la loi suivie par Y.

4) a) Vérifier que :

$$\forall x > 0, \quad 1-\phi(x) = \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt\,.$$

b) Montrer que :

$$\int_x^{+\infty} t^{-2}\varphi(t)dt \leq x^{-3}\int_x^{+\infty} t\varphi(t)dt\,,$$

puis en déduire :

$$\forall x > 0,\ 1-\frac{1}{x^2} \leq \frac{x\big(1-\phi(x)\big)}{\varphi(x)} \leq 1\,.$$

c) Montrer l'équivalence en $+\infty$: $1-\phi(x) \sim \dfrac{\varphi(x)}{x}$.

5) a) En utilisant 4) b) montrer que :

$$\forall x > 1, \qquad \ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right) \leq \ln(x) - g(x) + \frac{\ln(2\pi)}{2} + \frac{x^2}{2} \leq 0\,.$$

b) En déduire l'équivalence en $+\infty$: $g(x) \sim \dfrac{x^2}{2}$.

Exercice 6.2

Les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Énoncé

Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite, soit φ sa densité de probabilité et ϕ sa fonction de répartition. On admet que X admet des moments de tous ordres.

On note f la densité d'une loi exponentielle de paramètre 1. On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = -\ln(1-\phi(x))$ et la variable aléatoire $Y = g(X)$.

1) Question de cours : définition et propriétés de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

2) Montrer que ϕ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$. On notera ϕ^{-1} l'application réciproque.

3) Calculer la fonction de répartition de Y et reconnaitre la loi suivie par Y.

4) a) Vérifier que :

$$\forall x > 0, \quad 1-\phi(x) = \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt\,,$$

b) Montrer que :

$$\int_x^{+\infty} t^{-2}\varphi(t)dt \leq x^{-3}\int_x^{+\infty} t\varphi(t)dt\,,$$

puis en déduire :

$$\forall x > 0,\ 1-\frac{1}{x^2} \leq \frac{x(1-\phi(x))}{\varphi(x)} \leq 1\,.$$

c) Montrer l'équivalence en $+\infty$: $1-\phi(x) \sim \dfrac{\varphi(x)}{x}$.

5) a) En utilisant 4) b) montrer que :

$$\forall x > 1, \qquad \ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right) \leq \ln(x) - g(x) + \frac{\ln(2\pi)}{2} + \frac{x^2}{2} \leq 0\,.$$

b) En déduire l'équivalence en $+\infty$: $g(x) \sim \dfrac{x^2}{2}$.

Analyse stratégique de l'énoncé

Cet exercice est un extrait d'un sujet d'écrit de 2006. Si les premières questions sont aisées, les questions 4) et 5) peuvent sembler assez difficiles pour les candidats. Il faut alors essayer d'en tirer le meilleur parti possible sans pour cela se décourager.

1) Il ne faut pas oublier la définition et les propriétés générales qui servent dans la question suivante puis on donne les propriétés spécifiques liées à la loi normale.

↪ Bien lire le texte pour répondre avec précision aux questions.

2) Ceci ne doit pas poser de problèmes si l'on a répondu bien à la question de cours.

↪ Cette question doit être traitée rapidement.

3) La méthode est usuelle, cependant il faut faire attention aux signes ainsi qu'aux ensembles de définition des différentes fonctions qui entrent en jeu.
↪ Attention à ne pas se précipiter et à justifier toutes les étapes de calcul.

4) a) Si l'on commence par exprimer $1 - \phi(x)$ sous forme d'une intégrale, la forme du résultat à obtenir suggère l'utilisation d'intégration par parties. Il faut alors se souvenir que $\forall t,\ \varphi'(t) = -t\varphi(t)$ et on peut ensuite conclure.
↪ Ne pas oublier qu'on ne fait pas d'intégration par parties sur des intégrales impropres.

b) La première inégalité ne doit pas poser de problème, il s'agit uniquement de majorer la fonction sous le signe intégrale. Il ne faut simplement pas oublier de justifier la convergence des intégrales mises en jeu. Pour la deuxième partie de la question, on peut commencer par transformer l'inégalité à obtenir de façon à faire apparaitre $1 - \phi(x)$ pour ensuite utiliser le résultat du 4) a). Bien entendu, les deux inégalités se démontrent séparément.
↪ Les calculs peuvent rapidement devenir très confus si l'on n'est pas très rigoureux dans leur exposé. Il faut toujours préciser avec soin, l'inégalité que l'on cherche à obtenir.

c) Démontrer une équivalence de fonctions revient à un calcul de limite ; et, avec le résultat de la question précédente et le théorème d'encadrement, l'équivalence est immédiate.
↪ La justification rigoureuse d'une équivalence s'obtient par un calcul de limite.

5) a) Compte tenu de la forme de l'inégalité, il est clair qu'il va falloir la transformer un peu. On utilise les propriétés de la fonction logarithme, ainsi que la définition de la fonction g et de la fonction φ. L'indication donnée dans le texte permet ensuite de conclure.
↪ Cette question n'est pas si difficile quand on fait bien le lien entre les questions et les données.

b) Il suffit ici, à partir de l'inégalité précédente, d'encadrer le quotient des deux fonctions et d'utiliser le théorème d'encadrement pour obtenir la limite qui justifie l'équivalence.
↪ On doit avoir cherché cette question même si lors de la préparation on n'a pas justifié la question précédente.

Corrigé

1) La fonction de répartition de la loi normale centrée réduite est la fonction notée ϕ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

Cette fonction est :

- continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- croissante strictement sur $\mathbb{R}$.
- admet pour limites 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$.

Et, de plus, on a :

$$\phi(0) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \phi(-x) = 1 - \phi(x).$$

2) La variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite, donc sa densité φ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Sa fonction de répartition ϕ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Et puisqu'elle admet pour limites 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.
La bijection réciproque de ϕ, notée ϕ^{-1}, est donc définie sur $]0,1[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

3) On remarque tout d'abord que, puisque ϕ est à valeurs dans $]0,1[$ alors la fonction $x \longmapsto 1-\phi(x)$ est à valeurs dans $]0,1[$, donc la fonction $x \longmapsto \ln(1-\phi(x))$ est à valeurs dans $]-\infty,0[$, et, par conséquent g est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.

La fonction F_Y, fonction de répartition de Y, est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ F_Y(x) = P(Y \le x) = P(g(X) \le x).$$

Donc :

$$\forall x \le 0, \quad F_Y(x) = 0.$$

Soit $x > 0$. On a :

$$P(Y \le x) = P(-\ln(1-\phi(X) \le x) = P(\phi(X) \le 1 - e^{-x}).$$

Puisque $x > 0$ alors $1 - e^{-x} \in\,]0,1[$, donc :

$$P(Y \le x) = P\big(X \le \phi^{-1}(1-e^{-x})\big) = \phi(\phi^{-1}(1-e^{-x})) = 1 - e^{-x}.$$

En résumé :

$$\boxed{F_Y(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } \ x > 0 \\ 0 & \text{si } \ x \le 0 \end{cases}.}$$

Et on reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1.

4) a) Soit $x > 0$. On remarque que l'on a :

$$1 - \phi(x) = \int_x^{+\infty} \varphi(t)dt.$$

Par conséquent, vérifier l'égalité demandée revient à vérifier l'égalité suivante :

$$\int_x^{+\infty} \varphi(t)dt = \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}dt.$$

D'autre part, on a :

$$\forall t > 0, \quad \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Donc :

$$\forall t > 0, \quad \varphi'(t) = \frac{-t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} = -t\varphi(t).$$

Et ceci veut dire :

$$\forall t > 0, \quad \varphi(t) = -\frac{\varphi'(t)}{t}.$$

On effectue alors une intégration par parties.

Pour cela on considère un réel $A > x$ et les deux fonctions de classe C^1 définies sur l'intervalle $[x, A]$ par :

$$u(t) = \frac{-1}{t} \quad \text{et} \quad v(t) = \varphi(t).$$

On a alors :

$$u'(t) = \frac{1}{t^2} \quad \text{et} \quad v'(t) = \varphi'(t).$$

On obtient donc :

$$\int_x^A -\frac{\varphi'(t)}{t} dt = \left[\frac{-\varphi(t)}{t}\right]_x^A - \int_x^A \frac{\varphi(t)}{t^2} dt.$$

D'où :

$$\int_x^A \varphi(t) dt = \frac{\varphi(x)}{x} - \frac{\varphi(A)}{A} - \int_x^A \frac{\varphi(t)}{t^2} dt.$$

On sait que l'intégrale $\int_x^{+\infty} \varphi(t)dt$ converge et vaut $1 - \phi(x)$. Puisque l'on a :

$$\lim_{A \to +\infty} \frac{\varphi(A)}{A} = \lim_{A \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{A} e^{-\frac{A^2}{2}} = 0,$$

alors l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt$ converge.

Et on obtient :

$$\int_x^{+\infty} \varphi(t) dt = \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt.$$

Et donc :

$$\boxed{\forall x > 0, \quad 1 - \phi(x) = \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt.}$$

b) On sait que :

$$\forall x > 0, \quad \forall t \in [x, +\infty[, \quad \frac{1}{t^3} \leq \frac{1}{x^3}.$$

Donc, puisque $\forall t \in [x, +\infty[, \ t\varphi(t) > 0$, on a :

$$\forall x > 0, \quad \forall t \in [x, +\infty[, \quad \frac{\varphi(t)}{t^2} \leq \frac{t\varphi(t)}{x^3}.$$

D'autre part, on a vu au 4) a) que l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt$ converge et on a, par hypothèse, la convergence de l'intégrale $\int_x^{+\infty} t\varphi(t)dt$ comme moment d'ordre 1 de la variable X.

On obtient donc :

$$\boxed{\int_x^{+\infty} t^{-2} \varphi(t) dt \leq x^{-3} \int_x^{+\infty} t\varphi(t) dt.}$$

D'après 4) a) on a :

$$\forall x > 0, \quad 1 - \phi(x) = \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt\,.$$

Ce qui veut dire que :

$$\forall x > 0, \quad \frac{x(1-\phi(x))}{\varphi(x)} = 1 - \frac{x}{\varphi(x)} \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt\,.$$

Pour obtenir l'encadrement demandé, il suffit d'encadrer le terme :

$$\frac{x}{\varphi(x)} \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt\,.$$

Il est clair que :

$$\frac{x}{\varphi(x)} \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt \geq 0.$$

D'autre part, d'après ce qui précède, on a :

$$\forall x > 0, \quad \frac{x}{\varphi(x)} \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt \leq \frac{1}{x^2 \varphi(x)} \int_x^{+\infty} t\varphi(t) dt\,.$$

D'après la question 4) a), on a : $\forall t,\ t\varphi(t) = -\varphi'(t)$, donc :

$$\forall A > x, \quad \int_x^{A} t\varphi(t)dt = [-\varphi(t)]_x^A = \varphi(x) - \varphi(A).$$

Puisque l'on a :

$$\lim_{A \to +\infty} \varphi(A) = 0,$$

alors on obtient :

$$\int_x^{+\infty} t\varphi(t)dt = \varphi(x).$$

D'où :

$$\forall x > 0, \quad 0 \leq \frac{x}{\varphi(x)} \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt \leq \frac{1}{x^2}\,.$$

Et donc :

$$\boxed{\forall x > 0, \quad 1 - \frac{1}{x^2} \leq \frac{x\big(1-\phi(x)\big)}{\varphi(x)} \leq 1\,.}$$

c) On utilise le théorème d'encadrement avec l'inégalité précédente. Puisque l'on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0\,,$$

on obtient :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x(1-\phi(x))}{\varphi(x)} = 1\,,$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\text{En } +\infty \text{ on a : } 1 - \phi(x) \sim \frac{\varphi(x)}{x}\,.}$$

5) a) D'après 4) b) on a :

$$\forall x > 1, \quad 1 - \frac{1}{x^2} \leq \frac{x(1-\phi(x))}{\varphi(x)} \leq 1 .$$

Or, on sait que $x > 1$, d'où $1 - \frac{1}{x^2} > 0$. Et, puisque la fonction logarithme est croissante, on a :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \leq \ln(x) + \ln(1-\phi(x)) - \ln(\varphi(x)) \leq 0 .$$

Puisque l'on a :

$$g(x) = -\ln(1-\phi(x)) \quad \text{et} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

on obtient :

$$\boxed{\forall x > 1 \ \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \leq \ln(x) - g(x) + \frac{\ln(2\pi)}{2} + \frac{x^2}{2} \leq 0 .}$$

b) De l'inégalité précédente, on tire :

$$\forall x > 1, \ \ln(x) + \frac{\ln(2\pi)}{2} + \frac{x^2}{2} \leq g(x) \leq \ln(x) + \frac{\ln(2\pi)}{2} + \frac{x^2}{2} - \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

Et donc :

$$\frac{2\ln(x)}{x^2} + \frac{\ln(2\pi)}{x^2} + 1 \leq \frac{2g(x)}{x^2} \leq \frac{2\ln(x)}{x^2} + \frac{\ln(2\pi)}{x^2} + 1 - \frac{2}{x^2}\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

Or on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2\pi)}{x^2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2}\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 0,$$

et, par croissances comparées :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln(x)}{x^2} = 0.$$

Donc, d'après le théorème d'encadrement, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2g(x)}{x^2} = 1.$$

En conclusion, on a :

$$\boxed{\text{En } +\infty, \text{ on a : } g(x) \sim \frac{x^2}{2}.}$$

Techniques à mémoriser

♡ **Il faut se souvenir** que lorsqu'on cherche la fonction de répartition d'une variable aléatoire Y définie par $Y = f(X)$, il est utile de connaître $f(X(\Omega))$.

♡ **Il faut se souvenir** qu'on ne doit pas faire d'intégration par parties sur des intégrales impropres.

♡ **Il faut se souvenir** de toujours justifier la convergence des intégrales avant d'intégrer des égalités ou des inégalités.

♡ **Il faut se souvenir** que lorsqu'on veut montrer une équivalence entre deux fonctions, on calcule le quotient des deux et on montre que celui-ci tend vers 1.

♡ **Il faut se souvenir** que si l'on note φ la densité de la loi normale centrée réduite alors $\forall t \in \mathbb{R},\quad t\varphi(t) = -\varphi'(t)$.

Formulaire

- La fonction de répartition de la loi normale centrée réduite est la fonction notée ϕ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt\,.$$

Cette fonction est continue, dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Elle admet pour limites 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$ et définit donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

Et, de plus, on a :

$$\phi(0) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \phi(-x) = 1 - \phi(x).$$

- La fonction de répartition d'une variable Y qui suit la loi exponentielle de paramètre a est la fonction F_Y définie par :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 1 - e^{-ax} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \qquad (1).$$

Réciproquement toute fonction définie par (1) est la fonction de répartition d'une variable exponentielle de paramètre a.

- Toute fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I réalise une bijection de I sur $J = f(I)$. Dans ce cas elle admet une bijection réciproque notée f^{-1} définie sur J et à valeurs dans I.

Énoncé

Les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Analyse stratégique de l'énoncé

Cet exercice sans préparation, qui suit un exercice difficile, est à la fois court et simple.

Il suffit de réduire les endomorphismes représentés par ces deux matrices. S'il existe des bases dans lesquelles les matrices réduites de A et B sont égales alors les deux matrices seront semblables.

↪ Il fallait naturellement penser à la réduction des matrices tout en essayant d'éviter les calculs superflus.

Corrigé

On cherche les éléments propres des matrices A et B.

On sait que λ est valeur propre d'une matrice M si et seulement si $M - \lambda I$ est non inversible.

On sait de plus que si $N = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alors N est non inversible si et seulement si son déterminant $\delta = ad - bc$ est nul.

Pour la matrice A, on a :

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}.$$

Et $A - \lambda I$ est non inversible si et seulement si :

$$(3-\lambda)^2 - 4 = 0\,,$$

c'est-à-dire :

$$(1-\lambda)(5-\lambda) = 0\,.$$

Donc A a deux valeurs propres distinctes dans un espace de dimension 2, par conséquent A est diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une matrice P inversible telle que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = P^{-1}AP.$$

Pour la matrice B on a :

$$B - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 5 & 6-\lambda \end{pmatrix}.$$

Et $B - \lambda I$ est non inversible si et seulement si :

$$\lambda(\lambda - 6) + 5 = 0\,,$$

c'est-à-dire :

$$(1-\lambda)(5-\lambda) = 0\,.$$

Donc B a deux valeurs propres distinctes dans un espace de dimension 2, par conséquent B est diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une matrice Q inversible telle que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = Q^{-1}BQ.$$

Les matrices A et B sont semblables à la même matrice diagonale. Puisque la relation de similitude des matrices est une relation transitive, alors :

Les matrices A et B sont semblables.

Techniques à mémoriser

♡ **Il faut se souvenir** de penser à la réduction des endomorphismes quand se pose la question de la similitude des matrices.

♡ **Il faut se souvenir** que, dans le cas où on a affaire à une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on peut utiliser le déterminant pour savoir si la matrice est inversible.

Formulaire

- Un réel λ est valeur propre d'une matrice M si et seulement si $M - \lambda I$ est non inversible.
- Si $N = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alors N est non inversible si et seulement si son déterminant $\delta = ad - bc$ est nul.
- La relation de similitude des matrices est une relation réflexive, symétrique et transitive.