

Jour n°7

Exercice 7.1

1) Question de cours : donner la définition d'un estimateur et définir la notion de risque quadratique.

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N . On sait que N est au moins égal à 2 mais on ne connaît pas sa valeur exacte et on cherche à l'estimer.

Pour cela on effectue n tirages avec remise ($n \in \mathbb{N}^*$) et on note Z_k le numéro de la boule obtenue au $k^{\text{ième}}$ tirage ($1 \leq k \leq n$). On modélise l'expérience par un espace probabilisé (Ω, A, P) .

2) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Z_k.$$

Donner, en fonction de M_n , l'expression d'un estimateur sans biais et convergent de N .

3) On note $S_n = \max(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$.

a) Déterminer la fonction de répartition de S_n .

b) Montrer que pour toute variable aléatoire Y à valeur dans $\{1, 2, \dots, N\}$ on a la relation :

$$E(Y) = \sum_{k=1}^N P(Y \geq k).$$

c) En déduire que :

$$E(S_n) \geq N - \frac{N}{n+1}.$$

d) En déduire que S_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de N .

Exercice 7.2

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Trouver une relation entre A^2 , A et I . En déduire que A est inversible et donner son inverse.

2) Calculer les valeurs propres possibles de A .

3) La matrice A est-elle diagonalisable ?

Énoncé

1) Question de cours : donner la définition d'un estimateur et définir la notion de risque quadratique.

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N . On sait que N est au moins égal à 2 mais on ne connaît pas sa valeur exacte et on cherche à l'estimer.

Pour cela on effectue n tirages avec remise ($n \in \mathbb{N}^*$) et on note Z_k le numéro de la boule obtenue au $k^{\text{ième}}$ tirage ($1 \leq k \leq n$). On modélise l'expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

2) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Z_k.$$

Donner, en fonction de M_n , l'expression d'un estimateur sans biais et convergent de N .

3) On note $S_n = \max(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$.

- Déterminer la fonction de répartition de S_n .
- Montrer que pour toute variable aléatoire Y à valeur dans $\{1, 2, \dots, N\}$ on a la relation :

$$E(Y) = \sum_{k=1}^N P(Y \geq k).$$

- En déduire que :

$$E(S_n) \geq N - \frac{N}{n+1}.$$

- En déduire que S_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de N .

Analyse stratégique de l'énoncé

Cet exercice permet de travailler sur les estimateurs dans le cas de variables discrètes. L'estimateur M_n , moyenne empirique, est un estimateur usuel et ses propriétés en sont connues. Les résultats sur l'estimateur S_n sont un peu plus difficiles à obtenir.

1) La définition d'un estimateur est souvent mal connue, et donnée de façon peu précise. Il faut définir avec rigueur le cadre dans lequel on se situe. Pour le risque quadratique, on peut aussi donner la propriété la plus souvent utilisée dans les calculs mais il ne faut pas négliger de donner la définition.

↪ Veiller à donner avec précision les hypothèses pour fournir une définition rigoureuse.

2) Si l'on sait ce qu'est le biais d'un estimateur et ce qu'est un estimateur convergent, la question ne doit pas poser de problème. La forme de la question suggère de regarder de plus près M_n , et donc de calculer son espérance et sa variance. On pourra ensuite déterminer l'estimateur demandé.

↪ On cherche une variable aléatoire fonction de M_n dont l'espérance est N . Il faut

naturellement bien connaître la notion de biais d'un estimateur ainsi que la notion d'estimateur convergent.

3) a) La méthode est très classique. On cherche la fonction de répartition de Z_k puis on calcule celle de M_n .

↪ La méthode de calcul d'une loi de max doit être connue.

b) La question est classique, il suffit d'exprimer $P(Y \geq k)$ comme une somme et d'inverser deux sommes finies.

↪ Cette propriété relève du cours et sa démonstration doit être connue.

c) Cette question est plus difficile. La question précédente constitue naturellement une indication. On calcule donc l'espérance cherchée avec la formule donnée, il suffira ensuite de minorer le résultat obtenu. Puisque l'espérance est donnée comme une somme, on peut penser à faire le lien avec des intégrales.

↪ Penser à utiliser les indications données dans les questions précédentes et ne pas hésiter à utiliser les méthodes liées à des chapitres différents.

d) Il faut naturellement savoir ce qu'est un estimateur asymptotiquement sans biais mais c'est une définition du cours. On a une minoration de l'espérance, il suffit d'en trouver une majoration et d'utiliser le théorème d'encadrement.

↪ Une limite s'obtient assez souvent par théorème d'encadrement.

Corrigé

1) On considère une suite de variables aléatoires (X_n) définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes de même loi et dépendant toutes du même paramètre a .

On appelle alors estimateur de a toute variable aléatoire Y_n fonction des variables X_n .

Soit Y_n un estimateur d'un paramètre a . On appelle risque quadratique de Y_n le réel $r_{Y_n}(a)$ défini par :

$$r_{Y_n}(a) = E((Y_n - a)^2).$$

Si l'on note $b_{Y_n}(a)$ le biais de l'estimateur Y_n en a , c'est-à-dire le réel $b_{Y_n}(a) = E(Y_n) - a$, alors on a :

$$r_{Y_n}(a) = V(Y_n) + b_{Y_n}^2(a).$$

2) Les variables aléatoires Z_k sont toutes indépendantes et de même loi uniforme sur $[[1, N]]$. Elles dépendent de N , paramètre à estimer. Par conséquent la variable aléatoire M_n , qui est fonction des Z_k , est un estimateur de N .

On calcule son biais.

On sait que :

$$\forall k \in [[1, n]], \quad E(Z_k) = \frac{N+1}{2}.$$

Donc, par linéarité,

$$E(M_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(Z_k) = \frac{N+1}{2}.$$

La variable M_n est un estimateur biaisé de N mais à partir de M_n on peut chercher un estimateur dont l'espérance sera N .

On pose :

$$T_n = 2M_n - 1.$$

On obtient alors :

$$E(T_n) = 2E(M_n) - 1 = N.$$

On a obtenu un estimateur sans biais de N . On montre que cet estimateur est convergent, c'est-à-dire que la limite de sa variance est nulle.

On calcule donc successivement la variance de Z_k , celle de M_n et enfin celle de T_n .

Puisque Z_k suit une loi uniforme, on a :

$$V(Z_n) = \frac{N^2 - 1}{12}.$$

Puisque les Z_k sont indépendantes, on a :

$$V(M_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n V(Z_k) = \frac{N^2 - 1}{12n}.$$

Et donc :

$$V(T_n) = 4V(M_n) = \frac{N^2 - 1}{3n}.$$

Par conséquent :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V(T_n) = 0,$$

et donc :

$$T_n = 2M_n - 1 \text{ est un estimateur sans biais et convergent de } N.$$

3) a) On détermine tout d'abord la fonction de répartition F_{Z_k} de Z_k .

Par définition, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{Z_k}(x) = P(Z_k \leq x).$$

Et puisque Z_k suit la loi uniforme sur $[[1, N]]$, en notant $[x]$ la partie entière d'un réel x , on a :

$$F_{Z_k}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{[x]}{N} & \text{si } 1 \leq x \leq N \\ 1 & \text{si } x > N \end{cases}.$$

On détermine ensuite la fonction de répartition de S_n .

Puisque $S_n = \max(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ on a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (S_n \leq x) = \bigcap_{i=1}^n (Z_i \leq x).$$

Or les variables Z_i sont indépendantes, donc :

$$F_{S_n}(x) = P(S_n \leq x) = \prod_{i=1}^n P(Z_i \leq x).$$

On remarque que toutes les variables Z_i suivent la même loi que la variable Z_k dont on vient de calculer la fonction de répartition.

On obtient alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{S_n}(x) = (F_{Z_k}(x))^n.$$

Et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{S_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \left(\frac{\lfloor x \rfloor}{N}\right)^n & \text{si } 1 \leq x \leq N. \\ 1 & \text{si } x > N \end{cases}$$

b) On sait que :

$$\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad P(Y \geq k) = \sum_{i=k}^N P(Y = i).$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^N P(Y \geq k) = \sum_{k=1}^N \sum_{i=k}^N P(Y = i) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^i P(Y = i) = \sum_{i=1}^N i P(Y = i).$$

D'où :

$$E(Y) = \sum_{k=1}^N P(Y \geq k).$$

c) On applique à la variable S_n le résultat précédent en remarquant que :

$$P(S_n \geq k) = 1 - P(S_n < k).$$

On obtient :

$$E(S_n) = \sum_{k=1}^N P(S_n \geq k) = N - \sum_{k=1}^N P(S_n < k).$$

Puisque k est entier, on a :

$$P(S_n < k) = P(S_n \leq k-1).$$

De plus, d'après 3) a), on a :

$$P(S_n < 1) = 0.$$

On obtient donc :

$$E(S_n) = N - \sum_{k=2}^N P(S_n \leq k-1) = N - \sum_{k=1}^{N-1} P(S_n \leq k).$$

Par conséquent, on a :

$$E(S_n) = N - \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

Pour minorer le résultat obtenu, on cherche à majorer la somme. On utilise la méthode de comparaison des séries et des intégrales.

On sait que :

$$\forall x \in [k, k+1], \quad \left(\frac{k}{N}\right)^n \leq \left(\frac{x}{N}\right)^n \leq \left(\frac{k+1}{N}\right)^n.$$

Donc :

$$\forall x \in [k, k+1], \quad \left(\frac{k}{N}\right)^n \leq \int_k^{k+1} \left(\frac{x}{N}\right)^n dx \leq \left(\frac{k+1}{N}\right)^n.$$

On somme alors la première inégalité pour tout entier k variant de 1 à $N-1$.

On obtient :

$$\sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n \leq \int_1^N \left(\frac{x}{N}\right)^n dx.$$

Puisque :

$$\int_1^N \left(\frac{x}{N}\right)^n dx = \left[\frac{1}{N^n} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_1^N = \frac{N}{n+1} - \frac{1}{(n+1)N^n},$$

On obtient la majoration :

$$\int_1^N \left(\frac{x}{N}\right)^n dx \leq \frac{N}{n+1},$$

et on a alors :

$$\sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n \leq \frac{N}{n+1}.$$

Par conséquent :

$$E(S_n) \geq N - \frac{N}{n+1}.$$

d) Les variables aléatoires Z_k sont toutes indépendantes et de même loi uniforme sur $[1, N]$. Elles dépendent de N , paramètre à estimer. Par conséquent la variable aléatoire S_n , qui est fonction des Z_k , est un estimateur de N .

Puisque la variable aléatoire S_n a pour univers $S_n(\Omega) = [1, N]$ alors on a nécessairement :

$$E(S_n) \leq N.$$

On a donc, d'après 3) c) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad N - \frac{N}{n+1} \leq E(S_n) \leq N.$$

D'après le théorème d'encadrement, on a alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(S_n) = N.$$

Ainsi,

S_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de N .

Techniques à mémoriser

♥ Il faut se souvenir que, lorsque se pose la question de montrer qu'on a un estimateur sans biais, il ne faut pas oublier de justifier la notion d'estimateur. Cet oubli est fréquemment reproché aux candidats.

♥ Il faut se souvenir que lorsqu'on obtient un estimateur dont le biais est une fonction affine du paramètre étudié, il est très simple d'obtenir un estimateur sans biais.

♥ Il faut se souvenir que, si les variables Z_i sont des variables discrètes, alors la variable $S = \max(Z_i)$ est aussi une variable discrète et que par conséquent sa fonction de répartition n'est pas continue.

♥ Il faut se souvenir de porter une grande attention aux bornes de sommation lorsqu'on intervertit les signes $\sum$.

♥ Il faut se souvenir des différentes techniques de majoration et de minoration. En particulier, pour majorer une somme il suffit de majorer l'un des termes, et pour minorer une différence il suffit de majorer le deuxième terme.

♥ Il faut se souvenir de la méthode de comparaison des séries et des intégrales, et plus précisément de la méthode consistant à obtenir un encadrement d'une somme partielle d'une série à partir du calcul d'une intégrale.

♥ Il faut se souvenir de penser à utiliser le théorème d'encadrement pour calculer des limites.

♥ Il faut se souvenir que si X est une variable dont l'univers est inclus dans $\mathbb{N}$ alors on a : $P(X < k) = P(X \leq k - 1)$ pour tout entier k .

Formulaire

- On considère une suite de variables aléatoires (X_n) définies sur le même espace probabilisé (Ω, A, P) , indépendantes de même loi et dépendant toutes du même paramètre a .

On appelle alors estimateur de a toute variable aléatoire Y_n fonction des variables X_n .

- Soit Y_n un estimateur d'un paramètre a . On appelle biais de Y_n le réel $b(a)$ défini par :

$$b_{Y_n}(a) = E(Y_n) - a.$$

On dit que Y_n est sans biais lorsque :

$$b_{Y_n}(a) = 0.$$

On a alors :

$$E(Y_n) = a.$$

- Soit Y_n un estimateur d'un paramètre a . On appelle risque quadratique de Y_n le réel noté $r_{Y_n}(a)$ défini par :

$$r_{Y_n}(a) = E((Y_n - a)^2).$$

Et on a :

$$r_{Y_n}(a) = V(Y_n) + b_{Y_n}^2(a).$$

- Soit Y_n un estimateur d'un paramètre a . On dit que l'estimateur Y_n est convergent lorsque :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V(Y_n) = 0 .$$

- Soit Y une variable qui suit la loi uniforme sur $[[1, n]]$. Y possède une espérance et une variance et on a :

$$E(Y) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(Y) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Énoncé

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- 1) Trouver une relation entre A^2 , A et I . En déduire que A est inversible et donner son inverse.
- 2) Calculer les valeurs propres possibles de A .
- 3) La matrice A est-elle diagonalisable ?

Analyse stratégique de l'énoncé

Cet exercice simple montre la recherche des éléments propres d'une matrice sans la méthode de Gauss.

1) On commence naturellement par calculer A^2 ; la relation entre les matrices s'obtient ensuite aisément. Pour montrer que la matrice A est inversible, il suffit ensuite d'arranger cette relation de façon à obtenir un produit matriciel de type $AB = I$. La matrice obtenue sera alors la matrice inverse cherchée.

↪ La recherche de l'inverse d'une matrice est aisée lorsqu'on connaît une relation entre les puissances de cette matrice.

2) La forme de la question suggère sans équivoque l'utilisation de la méthode dite du polynôme annulateur.

↪ Cette question ne comporte aucune difficulté. Il faut impérativement savoir l'exposer sans hésitation.

3) L'enchaînement des questions induit la recherche des éléments propres de la matrice. La conclusion en découlera immédiatement.

↪ Cette question est classique, il faut simplement veiller à ne pas se noyer dans des calculs aussi fastidieux qu'inutiles.

Corrigé

1) Un calcul simple permet d'obtenir A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$A^2 = 3A - 2I.$$

Par conséquent :

$$\frac{3}{2}A - \frac{1}{2}A^2 = I.$$

Et donc :

$$A\left(\frac{3}{2}I - \frac{1}{2}A\right) = \left(\frac{3}{2}I - \frac{1}{2}A\right)A = I.$$

D'où :

$$A \text{ est inversible et son inverse est : } \frac{3}{2}I - \frac{1}{2}A.$$

2) La relation obtenue à la question 1) peut aussi s'écrire :

$$A^2 - 3A + 2I = 0.$$

Par conséquent le polynôme $P(X) = X^2 - 3X + 2$ est un polynôme annulateur de la matrice A .

Donc, si λ est une valeur propre de A , alors on a $P(\lambda) = 0$.

Les valeurs propres possibles de A sont donc les solutions de l'équation $P(X) = 0$.

Or :

$$X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2).$$

D'où :

Les valeurs propres possibles de A sont donc $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$.

3) On vérifie que $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$ sont bien des valeurs propres et on cherche la dimension des sous-espaces propres associés.

Pour cela, on montre que la matrice $A - \lambda I$ est non inversible et, dans ce cas, le sous-espace propre associé sera par définition :

$$E_\lambda = \ker(A - \lambda I).$$

Pour $\lambda = 1$, on a :

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice a deux colonnes égales, elle est donc non inversible. Par conséquent, $\lambda = 1$ est une valeur propre de A . De plus cette matrice est de rang 1. Par conséquent, d'après le théorème du rang, on a :

$$\dim E_1 = \dim \ker(A - I) = 2.$$

Remarque : la lecture matricielle permet de montrer que :

$$E_1 = \ker(A - I) = \text{Vect} \{e_1 + e_2, e_2 + e_3\}.$$

Pour $\lambda = 2$, on a :

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de cette matrice vérifient $C_1 = C_3 - C_2$. Cette matrice est donc non inversible. Par conséquent, $\lambda = 2$ est une valeur propre de A . De plus cette matrice est de rang 2. Par conséquent, d'après le théorème du rang, on a :

$$\dim E_2 = \dim \ker(A - 2I) = 1.$$

Remarque : la lecture matricielle permet de montrer que :

$$E_2 = \ker(A - 2I) = \text{Vect} \{e_1 + e_2 - e_3\}.$$

La matrice A est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres de A est égale à la dimension de l'espace E sur lequel est défini l'endomorphisme associé à A .

Puisque $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ alors $\dim E = 3$ et donc :

$$\dim E_1 + \dim E_2 = \dim E.$$

En conclusion :

A est diagonalisable.

Techniques à mémoriser

♥ Il faut se souvenir que l'obtention d'une relation entre les puissances d'une matrice permet souvent de savoir si la matrice est inversible et de déterminer la matrice inverse.

♥ Il faut se souvenir, lors de l'utilisation de la méthode du polynôme annulateur que les solutions obtenues ne sont que des valeurs propres possibles et qu'il faut vérifier qu'elles le sont effectivement.

♥ Il faut se souvenir des critères de diagonalisation et en particulier de la condition nécessaire et suffisante de diagonalisation.

Formulaire

- Un réel λ est valeur propre d'une matrice A si et seulement si la matrice $A - \lambda I$ est non inversible et, dans ce cas, le sous-espace propre E_λ associé à la valeur propre λ est défini par :

$$E_\lambda = \ker(A - \lambda I).$$

