Fonctions de deux variables

Introduction

Le but de ce chapitre est d'étudier les fonctions définies sur (une partie de) $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Exemple : la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = 2x + 3y^2$. Ces fonctions sont utilisées dans de nombreux domaines des sciences physiques et également en économie. Un exemple célèbre est la fonction de Cobb-Douglas. Il s'agit d'une fonction qui a pour variables le capital K et la quantité de travail L et qui leur une production P par une formule du type :

$$P(K,L) = C.K^{\alpha}.L^{\beta}\ ;$$

où C, α, β sont des constantes fixées.
De nombreuses questions peuvent se poser sur ces fonctions. Nous étudierons essentiellement celles de leur représentation graphique et dela recherche de leurs éventuels extrema.
Tous les résultats dans ce chapitre seront admis.

1 Quelques aspects du plan $\mathbb{R}^2$

Comme les fonctions d'une variables, les fonctions de deux variables sont souvent définies non pas sur $\mathbb{R}^2$ mais sur une partie de $\mathbb{R}^2$. Dans tout le cours, $\mathbb{R}^2$ est muni d'un repère orthonormé $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$; le couple (x,y) désigne les coordonnées d'un point dans ce repère.

Exemple 1.1. *On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = \dfrac{3x+2y^2}{xy}$. Sur quel sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ la fonction f est-elle définie ? Dessiner ce sous-ensemble dans le plan.*

Dans le cas des fonctions d'une variable, ces parties sont souvent des intervalles (ou des réunions d'intervalle). Dans $\mathbb{R}^2$, la description de ces ensembles est un peu plus difficile. On rappelle ci-dessous la description de quelques sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$.

1.1 Demi-plans

Exemple 1.2. *Sur quel sous-ensemble du plan sont définies les fonctions de Cobb-Douglas ?*

Une droite est définie par une équation du type $y = ax + b$ (ou $x = c$ pour une droite verticale). Une inéquation du type $y \leq ax + b$ définit un demi-plan.

Exemple 1.3. *Dessiner l'ensemble D des points (x,y) du plan vérifiant $y \geq 0$, $x \leq 1$ et $y \leq x$.*

1.2 Disques

Rappelons que la distance entre deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) du plan est définie par :

$$d\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\ .$$

Un point (x_0, y_0) et un nombre positif r étant fixés, l'ensemble des points (x, y) vérifiant

$$d\left((x, y), (x_0, y_0)\right) = r$$

est le cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon r.
L'ensemble des points (x, y) vérifiant

$$d\left((x, y), (x_0, y_0)\right) \leq r$$

est le disque (fermé) de centre (x_0, y_0) et de rayon r.

Exemple 1.4. *Dessiner l'ensemble des points (x, y) du plan vérifiant $(x-1)^2 + y^2 = 4$.*

2 Généralités sur les fonctions de deux variables

2.1 Premiers exemples

Parmi les fonctions de deux variables, les exemples les plus simples sont :

- Les fonctions polynomiales ; exemple : $f : (x, y) \mapsto x^2y + 5xy - 3y^3$.
  Que vaut $f(1, -1)$?
- Les fonctions coordonnées : $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$.

2.2 Représentations graphiques

Une première manière d'étudier ces fonctions est d'en faire une représentation graphique. Comme une telle fonction f associe un réel à tout couple (x, y), cette représentation nécessitera 3 dimensions. On représente en général les points (x, y) dans le plan horizontal et la valeur $f(x, y)$ suivant l'axe vertical. Le graphique associé à f est alors l'ensemble des points de coordonnées (x, y, z) de l'espace vérifiant $z = f(x, y)$. On donne ci-dessous un exemple simple ; d'autres représentations seront effectuées en TP à l'aide de python.

Exemple 2.1. *Tracer le graphique correspondant à la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 + y^2$.*
Avant de faire ce dessin en trois dimensions, on pourra tracer l'intersection de cette surface et des plans $x = 0$ et $y = 0$.

Outre les coupes utilisées précédemment, on utilise aussi la représentation des lignes de niveau : $f(x, y) = c$, où c est une constante. Cela permet d'avoir des dessins en deux dimensions.

Exemple 2.2. *Reprendre l'exemple précédent et tracer quelques lignes de niveau.*

Ces lignes de niveau sont également utilisées dans les fonctions servant aux applications (en économie par exemple). Les lignes de niveau associées aux fonctions de Cobb-Douglas sont appelées isoquantes.

2.3 Continuité

On va étendre aux fonctions de deux variables certaines notions vues dans le cadre des fonctions définies sur $\mathbb{R}$. La première de ces notions est la continuité.
Rappelons la définition pour une fonction définie sur $\mathbb{R}$: f est continue en x_0 si sa limite en x_0 est $f(x_0)$, c'est à dire si :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha\ ,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| < \alpha \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon\ .$$

La définition de la continuité dans $\mathbb{R}^2$ reprend cette définition, mais dans $\mathbb{R}^2$, on utilise la distance définie ci-dessus pour remplacer la valeur absolue dans $\mathbb{R}$.

Définition 2.3. *Une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est dite continue au point (x_0, y_0) lorsque*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists r > 0\ ,\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ d((x_0, y_0), (x, y)) < r \implies |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon\ .$$

En pratique : On admettra que

- Les fonctions coordonnées sont continues.
- Les fonctions polynomiales sont continues.
- Les sommes, produits, quotients (quand le dénominateur est non nul) de fonctions continues sont continues.
- La composée d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue et d'une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue est continue.

Exemple 2.4. *Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ est continue.*

3 Calcul différentiel pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$

Le principal outil d'étude des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ est la dérivée. L'analogue pour les fonctions de deux variables sera la notion de dérivée partielle.

3.1 Dérivées premières

On définit la dérivée d'une fonction de deux variables selon chaque coordonnée.

Définition 3.1 (Dérivées partielles)**.** *Soit f une fonction d'une partie D de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et soit $(x_0, y_0) \in D$.*
On définit la première dérivée partielle (ou dérivée partielle suivant la première coordonnée) de f en (x_0, y_0) comme la dérivée au point x_0 de l'application $x \mapsto f(x, y_0)$ (lorsqu'elle existe). Cette première dérivée partielle est notée $\partial_1 f$.
On définit la deuxième dérivée partielle (ou dérivée partielle suivant la deuxième coordonnée) de f en (x_0, y_0) comme la dérivée au point y_0 de l'application $y \mapsto f(x_0, y)$ (lorsqu'elle existe). Cette seconde dérivée partielle est notée $\partial_2 f$.

Remarque 3.2. *Au lieu des notations $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ on verra parfois $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.*

Exemple 3.3. *Déterminer les dérivées partielles en chaque point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$ de la fonction f définie par $f(x, y) = x^2y + 5xy - 3y^3$.*

Exemple 3.4. *Reprenons l'exemple de la fonction de Cobb-Douglas : $P(K, L) = C.K^\alpha.L^\beta$. Dériver selon la première variable revient à se demander quel est le taux d'accroissement de P lorsque L est fixe et K varie. On appelle cette quantité productivité marginales du capital (idem pour le travail).*

Définition 3.5 (Fonction de classe $\mathcal{C}^1$)**.** *Une fonction f (d'une partie) de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ lorsqu' elle admet des dérivées partielles selon les deux coordonnées et que chacune de ces dérivées partielles est continue.*

Exemple 3.6. *Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2y + 5xy - 3y^3$ est de classe $\mathcal{C}^1$.*

<u>En pratique :</u> On admettra que

- Les sommes, produits, quotients (quand le dénominateur est non nul) de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sont de classe $\mathcal{C}^1$.
- La composée d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et d'une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Définition 3.7 (Gradient)**.** *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction admettant des dérivées partielles selon les deux coordonnées. On appelle gradient de f au point $(x, y) \in D$ la matrice colonne :*

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x, y) \\ \partial_2 f(x, y) \end{pmatrix} .$$

Remarque : le symbole ∇ se lit "nabla".

Remarques 3.8.

- *Rappeler la formule du développement limité à l'ordre 1 en pour une une fonction dérivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*
- *Calculer ${}^tA\ B$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$*

Comme les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, les fonctions de deux variables admettent des développements limités (la formule de la propriété suivante est non exigible).

Propriété 3.9 (Développement limité d'ordre 1)**.** *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$; soit $(x, y) \in D$.*
Alors il existe une fonction ϵ définie sur un voisinage de $(0,0)$ et admettant 0 pour limite en $(0,0)$ telle que

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + {}^t\nabla f(x, y).\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \sqrt{h^2+k^2}\ \epsilon(h, k)\ .$$

Exemple 3.10. *Déterminer le développement limité d'ordre 1 au point $(1, 2)$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2y + 5xy - 3y^3$.*

3.2 Dérivées secondes

Définition 3.11. *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$; soit $(x, y) \in D$.*
On dit que f admet des dérivées secondes en (x, y) lorsque $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ admettent des dérivées partielles selon la première et la seconde coordonnée. On pose alors :

$$\partial^2_{1,1} f(x, y) = \partial_1(\partial_1 f)(x, y) \quad , \quad \partial^2_{1,2} f(x, y) = \partial_2(\partial_1 f)(x, y) \quad ,$$

$$\partial^2_{2,1} f(x, y) = \partial_1(\partial_2 f)(x, y) \quad , \quad \partial^2_{2,2} f(x, y) = \partial_2(\partial_2 f)(x, y)\ .$$

Exemple 3.12. *On reprend la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2y+5xy-3y^3$. Déterminer ses quatre dérivées secondes.*

Définition 3.13 (Fonction de classe $\mathcal{C}^2$)**.** *Une fonction f définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$ est dite de classe $\mathcal{C}^2$ lorsque que f admet des dérivées secondes et que celles-ci sont continues.*

Remarques 3.14.

- *Une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est continue.*
- *Il est clair que les fonctions polynômes sont de classe $\mathcal{C}^2$.*

<u>En pratique :</u> On admettra que

- Les sommes, produits, quotients (quand le dénominateur est non nul) de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sont de classe $\mathcal{C}^2$.
- La composée d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et d'une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ est de classe $\mathcal{C}^2$.

Propriété 3.15 (Théorème de Schwarz)**.** *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur une partie ouverte D de $\mathbb{R}^2$.*
Alors pour tout $(x, y) \in D$ on a

$$\partial^2_{1,2} f(x, y) = \partial^2_{2,1} f(x, y)$$

Définition 3.16 (Matrice hessienne)**.** *Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$ et y admettant des dérivées secondes. Pour $(x,y) \in D$, on appelle matrice hessienne de f en (x,y) la matrice :*

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1} f(x,y) & \partial^2_{1,2} f(x,y) \\ \partial^2_{2,1} f(x,y) & \partial^2_{2,2} f(x,y) \end{pmatrix} .$$

Remarque 3.17. *D'après le théorème de Schwarz, si f est de classe $\mathcal{C}^2$, alors $\nabla^2 f(x,y)$ est symétrique.*

Exemple 3.18. *On reprend la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2y + 5xy - 3y^3$. Déterminer sa matrice hessienne en tout point (x,y).*

Rappelons la formule donnant le DL2 d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ en un point x :

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\ h + f''(x)\ \frac{h^2}{2} + o(h^2) .$$

Comme le développement limité d'ordre 1, la formule de la propriété suivante est non exigible.

Propriété 3.19 (Développement limité d'ordre 2)**.** *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$; soit $(x,y) \in D$.*
Alors il existe une fonction ϵ définie sur un voisinage de $(0,0)$ et admettant 0 pour limite en $(0,0)$ telle que

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + {}^t\nabla f(x,y).\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix}.\nabla^2 f(x,y).\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + (h^2+k^2)\ \epsilon(h,k) .$$

Exemple 3.20. *Déterminer le développement limité d'ordre 2 au point $(1,2)$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2y + 5xy - 3y^3$.*

4 Extrema des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$

L'étude des fonctions de deux variables a de nombreuses applications, en particulier celle des fonctions utilisées en économie. Nous allons nous concentrer sur l'étude des extrema de ces fonctions.

4.1 Ouverts et fermés dans $\mathbb{R}^2$

Ce paragraphe est un peu technique et on ne soulèvera pas de difficulté à ce sujet dans les exercices.
Pour en comprendre la nécessité, revenons sur des propriétés vues dans le cadre des fonctions d'une variable.

- Une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ est bornée et admet un maximum (minimum) sur cet intervalle. Observons que le fait que l'intervalle est fermé est essentiel. Par exemple, la fonction $x \mapsto x^2$ est majorée sur $]0, 1[$ et son plus petit majorant est 1. La valeur 1 est appelée supremum de la fonction sur $]0, 1[$. Par contre, cette valeur n'est pas atteinte.

- Pour chercher un minimum ou un maximum d'une fonction sur un intervalle, on cherche les endroits où la dérivée s'annule. Mais cela ne fonctionne pas, par exemple, sur l'intervalle $[0, 1]$ pour la fonction $x \mapsto x^2$: le maximum est atteint en 1 mais en ce point la dérivée ne s'annule pas. Pour pouvoir affirmer que la dérivée s'annule en tout point en lequel f admet un maximum ou un minimum, il faut que l'intervalle de définition soit ouvert.

Définition 4.1 (Ouverts et fermés dans $\mathbb{R}^2$). *Une partie D de $\mathbb{R}^2$ est dite ouverte lorsque : quel que soit (x_0, y_0) dans D, il existe $r > 0$ tel que :*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad d((x_0, y_0), (x, y)) < r \quad \Longrightarrow \quad (x, y) \in D \ .$$

Un fermé dans $\mathbb{R}^2$ est un ensemble dont le complémentaire est ouvert.

Exemple 4.2. *Exemples d'ouverts :*

- $]0, 1[\times]0, 1[$ *($[0, 1] \times [0, 1]$ est fermé)*
- *Disque ouvert de centre (x_0, y_0) et de rayon $r > 0$:* $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ d((x_0, y_0), (x, y)) < r\right\}$.
- *Demi-plan ouvert :* $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y > 2x + 1\right\}$

4.2 Recherche des extrema

Définissons tout d'abord les notions de maximum (et minimum) local et global.

Définition 4.3. *Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$. Un réel M est appelé maximum (global) de f sur D lorsque :*

- *il existe $(x_0, y_0) \in D$ tel que $f(x_0, y_0) = M$;*
- *pour tout $(x, y) \in D$, $f(x, y) \leq M$.*

Définition similaire pour le minimum.

Exemple 4.4. *Montrer que la fonction f définie dur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y + 3)^2 - 2$ admet un minimum global. Admet-elle un maximum global ?*

Définition 4.5. *Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$. On dit que f admet un maximum local en (x_0, y_0) lorsqu'il existe $r > 0$ tel $f(x_0, y_0)$ est un maximum de f sur le disque ouvert de centre (x_0, y_0) et de rayon r.*
Définition similaire pour le minimum local.

Illustration : Tracer les graphiques correspondant à $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ et $g : (x, y) \mapsto -x^2 - y^2$ au voisinage de $(0, 0)$.

Définition 4.6 (Sous-ensembles bornés de $\mathbb{R}^2$)**.** *Un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$ est dit borné lorsqu'il existe $r > 0$ tel que D soit inclu dans le disque de centre $(0, 0)$ et de rayon r.*

Propriété 4.7. *Soit f une fonction continue définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$. On suppose que D est fermée et bornée. Alors f est bornée et admet un maximum (et un minimum) global sur D.*

Définition 4.8 (point critique)**.** *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$. On appelle point critique de f tout point (x_0, y_0) en lequel le gradient s'annule, c'est à dire $\partial_1 f(x_0, y_0) = 0$ et $\partial_2 f(x_0, y_0) = 0$.*

Propriété 4.9 (Condition nécessaire d'existence d'un extremum)**.** *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur une partie ouverte D de $\mathbb{R}^2$.*
Si f admet un extremum local en un point (x_0, y_0) alors (x_0, y_0) est un point critique pour f.

Remarque 4.10. *Attention, la réciproque est fausse : il se peut que (x_0, y_0) soit un point critique pour f sans en être un extremum.*

Exemple 4.11. *On considère la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$. Montrer qu'elle admet un point critique en $(0, 0)$, mais qu'il ne s'agit pas d'un extremum.*

La recherche des points critiques donne donc les extrema possibles d'une fonction f. Comme pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, c'est le développement limité à l'ordre 2 qui va fournir un critère pour déterminer si un point crtique est un extremum.
Rappelons que pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ en un point x_0, c'est le signe de $f''(x_0)$ qui va permettre de savoir si la courbe est au-dessus ou au-dessous de sa tangente.
En particulier, si la dérivée de f s'annule en x_0, cela permet (dans certains cas) de savoir si f possède en x_0 un minimum ou un maximum (ou un point d'inflexion).
La matrice hessienne joue en dimension 2 un rôle analogue

Propriété 4.12. *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur une partie ouverte D de $\mathbb{R}^2$.*
On suppose que (x_0, y_0) est un point critique pour f.
Si f ne possède pas d'extremum local en (x_0, y_0), ce point sera appelé point col (ou point selle).
Notons alors H la matrice hessienne de f au point (x_0, y_0). Remarquons que, comme H est symétrique, H est diagonalisable, et donc semblable à une matrice diagonale notée $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

- *Si les deux valeurs propres λ_1 et λ_2 de H (potentiellement égales) sont strictement positives (resp. strictement négatives), alors f admet en (x_0, y_0) un minimum (resp. maximum) local.*
- *Si les deux valeurs propres λ_1 et λ_2 de H sont non nulles de signes opposés, alors f n'admet pas d'extremum en (x_0, y_0). Un tel point est appelé un point col (ou point selle) pour f.*
- *Si H a (au moins) une valeur propre nulle, on ne peut pas conclure par l'étude de la hessienne.*

Exemple 4.13. *Vérifier la cohérence de cette propriété avec les graphiques des fonctions $f_1 : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ et $f_2 : (x, y) \mapsto -x^2 - y^2$.*

Exemple 4.14. *Déterminer les (éventuels) points critiques de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par* $f(x,y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 4xy$.

Exemple 4.15. *Déterminer les (éventuels) extrema locaux de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par* $f(x,y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 4xy$.

Remarque 4.16. *Cette méthode permet de déterminer des extrema locaux. Pour montrer qu'un tel extremum est global, il n'y a pas de méthode générale.*

Exemple 4.17. *Déterminer les (éventuels) extrema globaux de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par* $f(x,y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 4xy$. *On pourra remarquer que* $f(x,y) - f(1,-1) = (x+y)^2 + (xy+1)^2$.