DS n°1

le 20/09/2024
Durée : 4h

— L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
— La clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une grande part dans la notation.
— Le résultat d'une question peut être admis afin de traiter une question suivante.
— On encadrera le résultat de chaque question.

Exercice 1

1. Calculer (exprimer en fonction de n) : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k$.
2. Calculer (exprimer en fonction de n) : $\displaystyle\sum_{k=4}^{n} 5\,\frac{2^{k+1}}{3^k}$.
3. Calculer : $\displaystyle\sum_{n=1}^{29} n$
4. Calculer (exprimer en fonction de n) : $\displaystyle\sum_{k=4}^{n}(2k+1)$.
5. Calculer (on ne demande pas de justifier la convergence) : $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^k$.
6. Calculer (on ne demande pas de justifier la convergence) : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{3}{4}\right)^k$.
7. Calculer (on ne demande pas de justifier la convergence) : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k^2\left(\frac{3}{4}\right)^k$.
8. Calculer (on ne demande pas de justifier la convergence) : $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{3^k}{k!}$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad f(x) = x^2 - x\ln(x) - 1 \quad \text{et} \quad f(0) = -1.$$

On donne le tableau de valeurs de f :

$x =$	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3	$3,5$	4
$f(x) \simeq$	$-0,4$	0	$0,6$	$1,6$	3	$4,7$	$6,9$	$9,5$

Étude d'une première suite associée à f.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Étudier la dérivabilité de la fonction f en 0. En donner une interprétation graphique.
3. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}_+^\times$, puis dresser son tableau de variations en précisant la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers l'infini.
4. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^\times$ sur un intervalle J que l'on précisera.
5. Quel est le sens de variation de f^{-1} ? Déterminer la limite de $f^{-1}(x)$ lorsque x tend vers l'infini.
6. Justifier que pour tout entier naturel k, il existe un unique réel x_k positif tel que $f(x_k) = k$.
7. Donner la valeur de x_0.
8. Utiliser le tableau de valeurs de f pour déterminer un encadrement de x_1 et x_2.
9. Exprimer x_k à l'aide de f^{-1} puis justifier que la suite (x_k) est croissante et déterminer sa limite lorsque k tend vers l'infini.

Étude d'une seconde suite.

On définit la fonction φ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \varphi(x) = \dfrac{2}{x} + \ln(x)$.

On définit la suite (u_n) par : $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \varphi(u_n)$

1. Étudier les variations de φ sur $\mathbb{R}_+^\times$.
2. On donne $\varphi(\frac{3}{2}) \simeq 1,73$ et $\varphi(2) \simeq 1,69$. Montrer que $\varphi\left(\left[\frac{3}{2}; 2\right]\right) \subset \left[\frac{3}{2}; 2\right]$.
3. En étudiant les variations de φ', montrer que : $\forall x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right], \quad |\varphi'(x)| \leq \frac{2}{9}$.
4. Montrer que les équations $x = \varphi(x)$ et $f(x) = 1$ sont équivalentes. En déduire que le réel x_1 est l'unique solution de l'équation $x = \varphi(x)$.
5. Montrer successivement que pour tout entier n :
$$\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2 \quad ; \quad |u_{n+1} - x_1| \leq \frac{2}{9}\,|u_n - x_1| \quad ; \quad |u_n - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^n.$$
6. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 3

I.Étude d'une fonction

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - 1 + x$.

On considère également la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 - \dfrac{x}{e^x}$.

1. (a) Montrer que g est croissante sur $\mathbb{R}$.
   (b) Calculer $g(0)$. En déduire, pour tout réel x, le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.
2. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (b) Montrer que la limite de f en $-\infty$ est $+\infty$.
3. (a) Montrer que la dérivée de f vérifie, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{e^x}$.
   (b) Établir le tableau de variations de f en y faisant figurer les limites.

II. Représentation graphique

On note $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x + 1$.

1. Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.
2. Déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) - (x + 1)$. Interpréter graphiquement cette limite.
3. Tracer sur le même graphique $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

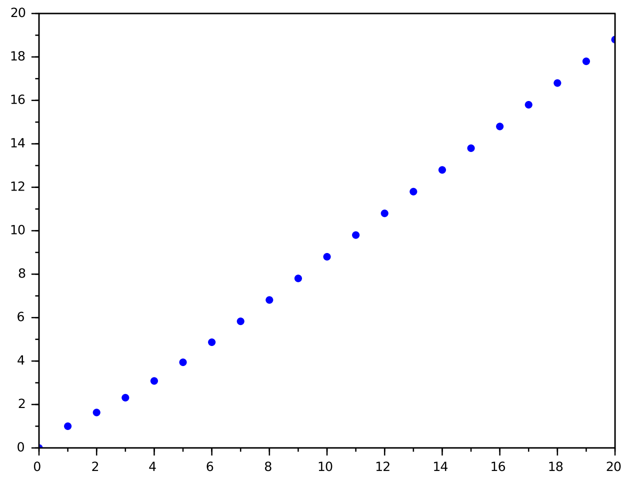
III. Calcul d'une intégrale

1. Calculer l'intégrale suivante :
$$\int_0^2 ((x+1) - f(x))\,\mathrm{d}x\ .$$
On pourra remarquer que $\dfrac{x}{e^x} = xe^{-x}$.
2. De quelle surface cette intégrale donne-t-elle la valeur ? On fera apparaître cette surface (en la hachurant) sur le graphique.

IV.Étude d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. (a) Écrire une fonction `suite(n)` qui prend en argument un entier n et renvoie la valeur de u_n.
   (b) Le tracé ci-dessous représente les premiers termes de cette suite. Que semble-t-il indiquer quant au comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini ?



2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > x$.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.
   (d) Conclure en démontrant l'observation faite sur le graphique à la question 1.(b).

Exercice 4

Dans ce problème, la lettre n désigne un entier naturel non nul.
On note f_n la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f_n(x) = xe^{-n/x}$ si $x \neq 0$ et $f_n(0) = 0$.
On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. (a) Montrer que f_n est continue en 0.
   (b) Montrer que f_n est dérivable (à droite) en 0 et donner la valeur du nombre dérivé en 0 de f_n.
2. (a) Montrer que f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$. Pour tout réel $x > 0$, calculer $f_n'(x)$ puis étudier son signe.
   (b) Calculer la limites de f_n en $+\infty$, puis donner le tableau de variation de f_n.
3. (a) Rappeler le développement limité à l'ordre 2 de e^u lorsque u est au voisinage de 0.
   (b) En déduire que, lorsque x est au voisinage de $+\infty$, on a :
   $$f_n(x) = x - n + \frac{n^2}{2x} + o(\frac{1}{x}).$$
   (c) En déduire qu'au voisinage de $+\infty$, (C_n) admet une asymptote "oblique"(D_n) dont on donnera une équation.
   Préciser la position relative de (D_n) et (C_n) aux voisinages de $+\infty$.
   (d) Donner l'allure de la courbe (C_1).
4. (a) Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera u_n, tel que $f_n(u_n) = 1$.
   (b) Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^\times$, u_n est strictement supérieur à 1 et que u_n est solution de l'équation $x\ln(x) = n$.
   (c) Étudier la fonction g définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = x\ln x$. En déduire, en utilisant la fonction g^{-1}, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
   (d) Justifier la relation $\ln u_n + \ln(\ln u_n) = \ln n$, puis montrer que $\ln u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.
   (e) En déduire un équivalent de u_n lorsque n est au voisnage de $+\infty$.