Corrigé du DS n°6 : Concours Blanc

le 25/02/2025
Durée : 4h

— L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
— La clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une grande part dans la notation.
— Le résultat d'une question peut être admis afin de traiter une question suivante.
— On encadrera le résultat de chaque question.

Exercice 1 : Sujet 0 EMLyon, Ex1

Deux systèmes différentiels

1. (a) Notons C_1, C_2 et C_3 les trois colonnes de A. On remarque que $C_2 = 2C_1$ et $C_3 = -C_1$; donc A est de rang 1.

   (b) On déduit de la question précédente que A n'est pas inversible et donc que 0 est valeur propre de A.
   Remarque : par le théorème du rang, on sait également que le sous espace propre associé est de dimension 2.
   Déterminons-en une base.
   On a :
   $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(A) \quad \Leftrightarrow \quad x + 2y - z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2y + z \ .$$
   Donc
   $$E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \ .$$
   Ces deux vecteurs forment de plus une famille libre (deux vecteurs non colinéaires), donc une base de $E_0(A)$.

   (c) On a
   $$AX_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix} = 6X_3 \ .$$
   De plus X_3 est bien non nul.
   Donc 6 est valeur propre de A et X_3 est un vecteur propre associé.

   (d) D'après les questions précédentes, A a deux sous espaces propres dont la somme des dimensions vaut 3. On en déduit que A est diagonalisable.
   En notant P la matrice formée en concaténant les bases des sous-espaces propres :
   $$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \ ;$$
   et
   $$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \ ;$$
   on a :
   $$A = PDP^{-1} \ .$$

2. En notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, le triplet de fonctions (x, y, z) est solution de (SH) si et seulement si $X' = AX$.
   En utilisant la diagonalisation de A on a donc :
$$\begin{aligned} (SH) &\iff X' = AX \\ &\iff X' = PDP^{-1}X \\ &\iff P^{-1}X' = DP^{-1}X \\ &\iff (P^{-1}X)' = D(P^{-1}X) \\ &\iff Y' = DY \ ; \end{aligned}$$
   où on a noté $Y = P^{-1}X$.
   Si de plus on note u, v et w les trois fonctions composants Y :
$$Y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \ ;$$
   on obtient
$$(SH) \iff Y' = DY = \iff \begin{cases} u' = 0 \\ v' = 0 \\ w' = 6w \end{cases}$$
   Le triplet (u, v, w) est solution de ce système si et seulement si il existe trois constantes α, β et γ telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$\begin{cases} u(t) = \alpha \\ v(t) = \beta \\ w(t) = \gamma e^{6t} \end{cases}$$
   On détermine ensuite la solution du système initial en utilisant le fait que $X = PY$: pour $t \in \mathbb{R}$:
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma e^{6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha + \beta + \gamma e^{6t} \\ \alpha + 2\gamma e^{6t} \\ \beta - \gamma e^{6t} \end{pmatrix} .$$

3. Si X_1 et X_2 sont deux solutions du système (SH) et ont la même valeur en t_0, alors elles sont solutions d'un même problème de Cauchy et donc elles sont égales.

4. (a) D'après ce qui précède, cette solution est de la forme $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} -2\alpha + \beta + \gamma e^{6t} \\ \alpha + 2\gamma e^{6t} \\ \beta - \gamma e^{6t} \end{pmatrix}$.
   Si de plus cette solution vérifie $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a
$$\begin{cases} -2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\gamma = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \end{cases}$$
   Résolvons ce système :
$$\begin{aligned} \begin{cases} -2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\gamma = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} -2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta + 5\gamma = 0 \quad L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ \beta - \gamma = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta + 5\gamma = 0 \\ -6\gamma = 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \end{aligned}$$
   Ainsi on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

(b) D'après ce qui précède, cette solution est de la forme $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} -2\alpha + \beta + \gamma e^{6t} \\ \alpha + 2\gamma e^{6t} \\ \beta - \gamma e^{6t} \end{pmatrix}$.

Si de plus cette solution vérifie $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a

$$\begin{cases} -2\alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \alpha + 2\gamma = 1 \\ \beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

Résolvons ce système :

$$\begin{cases} -2\alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \alpha + 2\gamma = 1 \\ \beta - \gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2\alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \beta + 5\gamma = 3 \quad L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ \beta - \gamma = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -2\alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \beta + 5\gamma = 3 \\ -6\gamma = -3 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1/2 \\ \gamma = 1/2 \end{cases}$$

Ainsi on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}e^{6t} \\ y(t) = e^{6t} \\ z(t) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}e^{6t} \end{cases}$$

5. (a) Le système (S) s'écrit sous la forme :

$$(S) \quad X' = AX + B(t)$$

en posant, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$B(t) = \begin{cases} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{cases}$$

(b) En retranchant Y' de chaque côté de l'égalité constituant (S), on obtient :

$$X' = AX + B(t) \iff X' - Y' = AX + B(t) - Y' \; .$$

Puis en utilisant le fait fait que Y est solution de (S) :

$$X' = AX + B(t) \iff X' - Y' = AX + B(t) - (AY + B(t)) \iff (X - Y)' = A(X - Y) \; .$$

On a ainsi démontré que X est solution de (S) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $Z : t \mapsto X(t) - Y(t)$ est solution de (SH) sur $\mathbb{R}$.

(c) On a d'une part, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; .$$

D'autre part, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} AY(t) + B(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2\,(1 - e^t) \\ e^t - 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^t - 1 \\ 2e^t - 2 \\ -e^t + 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2\,(1 - e^t) \\ e^t - 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc bien, pour $t \in \mathbb{R}$, $Y'(t) = AY(t) + B(t)$ et donc Y est solution de (S).
En utilisant le résultat de la question 5.b) et celui de la question 2., on en déduit que l'ensemble des solutions de (S) est l'ensemble des fonctions

$$t \mapsto \begin{pmatrix} -2\alpha + \beta + \gamma e^{6t} + e^t \\ \alpha + 2\gamma e^{6t} \\ \beta - \gamma e^{6t} + 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : ECRICOME E 2019, Ex3

Partie A

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrons que $f(-t) = f(t)$.
   — Si $t \geq 1$, alors $-t \leq -1$ et dans ce cas
   $$f(-t) = -\frac{-1}{(-t)^3} = \frac{-1}{-t^3} = \frac{1}{t^3} = f(t).$$
   — Si $t \leq -1, -t \geq 1$ et on a
   $$f(-t) = \frac{1}{(-t)^3} = \frac{1}{-t^3} = \frac{-1}{t^3} = f(t).$$
   — Enfin, si $-1 < t < 1$ alors $-1 < -t < 1$ et
   $$f(-t) = 0 = f(t).$$
   Dans tous les cas, on a bien $f(-t) = f(t)$ et f est bien paire.

2. L'intégrale est impropre en $+\infty$. Soit $A \geq 1$. On a
   $$\begin{aligned} \int_1^A f(t)\mathrm{d}t &= \int_1^A \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_1^A \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2A^2} \\ &\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$
   Donc l'intégrale converge et vaut $1/2$.

3. (a) On utilise le changement de variable $u = -t$, affine et donc licite. Comme dans ce cas $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$, il suit (comme $f(-u) = f(u)$ par parité) que
   $$\int_{-A}^{-1} f(t)\mathrm{d}t = -\int_A^1 f(-u)\mathrm{d}u = \int_1^A f(u)\mathrm{d}u.$$
   Faisant tendre A vers $+\infty$ et utilisant le résultat de la question précédente il suit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut également $1/2$.

   (b) On vérifie que f satisfait aux critères d'une densité de probabilité :
   — f est bien positive ou nulle partout sur $\mathbb{R}$: c'est clair sur $]-1;1[$ où elle est nulle et c'est clair sur $[1;+\infty$ où elle vaut $1/t^3$. Si $t \leq 1$, $t^3 \leq -1$ et donc $-1/t^3 \geq 0$ rendant bien f positive ou nulle partout ;
   — f est continue sur $]-\infty;-1]$ et sur $[1;+\infty[$ comme inverse d'une fonction puissance qui ne s'annule pas et elle est naturellement continue sur $]-1;1[$ comme fonction constante. Elle n'est pas continue en -1 ni en 1 mais il s'agit d'un nombre fini de points, ne posant donc pas de problème ;
   — Enfin, la nullité de f sur $]-1;1[$ et la convergence des deux intégrales précédentes permet d'affirmer que
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$
   Tous les critères sont satisfaits, f est bien une densité de probabilité.

4. (a) Par définition de la fonction de répartition de X,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

Ainsi,

— Si $x \leq -1$,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} \left(\frac{-1}{t^3}\right) \mathrm{d}t \\ &= \lim_{A+\infty} - \int_{-A}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} \\ &= \lim_{A+\infty} \left[\frac{1}{2t^2}\right]_{-A}^{x} \\ &= \frac{1}{2x^2} \end{aligned}$$

— Si $x \in]-1;1[$ alors,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t + 0 = \frac{1}{2}.$$

— Enfin, si $x \geq 1$,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t + \int_{1}^{x} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} + \int_{1}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} \\ &= 1 - \frac{1}{2x^2}, \end{aligned}$$

et on a bien le résultat attendu.

(b) X admet une espérance si et seulement si l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t| f(t)\mathrm{d}t$$

converge. Par parité de f (et donc de $t \mapsto |t|f(t)$), et nullité de f sur $]-1:1[$, ceci revient à la convergence de l'intégrale

$$\int_{1}^{+\infty} t f(t)\mathrm{d}t = \int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

On reconnait une intégrale de Riemann convergente. Donc X admet une espérance. Mais comme $t \mapsto t f(t)$ est impaire, cette espérance est nulle (par le changement de variable $u = -t$, l'intégrale de $tf(t)$ sur $]-\infty;-1]$ est égale à l'opposée de celle sur $[1;+\infty[$). En conclusion,

$$E(X) = 0.$$

(c) X admet une variance si et seulement elle admet un moment d'ordre 2 ce qui, avec les mêmes arguments que ci-dessus, est équivalent à la convergence de l'intégrale

$$\int_{1}^{+\infty} t^2 f(t)\mathrm{d}t = \int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

qui est cette fois une intégrale de Riemann divergente. Donc X n'admet pas de variance.

5. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = |X|$.

(a) On cherche à exprimer $F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(|X| \leq x)$. Commençons par observer que $|X| \geq 0$ et que donc $F_Y(x) = 0$ pour tout $x < 0$. Pour $x \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(|X| \leq x) = P(-x \leq X \leq x) \\ &= P(X \leq x) - P(X < -x) \\ &= F_X(x) - F_X(-x) \end{aligned}$$

Si $x \in]-1; 1[$, alors $-x \in]-1, 1[$ et donc $F_Y(x) = 0$. Si $x \geq 1$, on a $-x \leq -1$ et donc

$$F_Y(x) = 1 - \frac{1}{2x^2} - 1\frac{1}{2(-x)^2} = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

Au final, on obtient

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^2}, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}.$$

La fonction de répartition F_Y de Y est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$ (comme fonction constante d'une part et comme combinaison d'une constante de l'inverse d'un polynôme qui ne s'annule pas d'autre part) et continue en 1 donc sur $\mathbb{R}$. On peut alors conclure que Y est une v.a à densité.

(b) Une densité de Y s'obtient en dérivant F_Y là où elle est dérivable et en prenant une valeur arbitraire en 1. On a bien

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{2}{x^3}, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}.$$

(c) Y admet une espérance si et seulement si l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t| f_Y(t) \mathrm{d}t$$

converge. Comme f_Y est nulle en dehors de $[1; +\infty[$, il suffit de justifier la convergence et de calculer l'intégrale entre 1 et $+\infty$. Soit $A \geq 1$.

$$\int_1^A t f_Y(t) \mathrm{d}t = \int_1^A \frac{2\mathrm{d}t}{t^2} = \left[-\frac{2}{t}\right]_1^A = 2 - \frac{2}{A} \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 2.$$

Donc Y admet une espérance et $E(Y) = 2$.

Partie B

1. Soit D une variable aléatoire prenant les valeurs -1 et 1 avec équiprobabilité, indépendante de la variable aléatoire Y. Soit T la variable aléatoire définie par $T = DY$.

(a) Si $D = -1$ alors $Z = 0$, si $T = 1$, alors $Z = 1$. Donc $Z(\Omega) = \{0; 1\}$. De plus, $P(Z = 1) = P(Y = 1) = \frac{1}{2}$. Il suit que Z suit une loi de Bernoulli de paramètre 1/2. (C'est aussi une loi uniforme sur $\{0; 1\}$.) Comme on peut alors écrire $D = 2Z - 1$, la linéarité de l'espérance et les propriétés de la variance donnent

$$E(D) = 2E(Z) - 1 = 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 0, \qquad V(D) = 2^2 V(Z) = 4 \times \frac{1}{4} = 1.$$

(b) Comme D et Y sont deux variables aléatoires indépendantes admettant chacune une espérance, leur produit admet également une espérance, égale au produit des espérances.

$$E(T) = E(D) \times E(Y) = 0.$$

(c) D'après la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{(D = -1), (D - 1)\}$, on a

$$\begin{aligned} P(T \leq x) &= P(T \leq x \cap D = -1) + P(T \leq x \cap D = 1) = P(-Y \leq x \cap D = -1) + P(Y \leq x \cap D = 1) \\ &= P(Y \geq -x) P(D = -1) + P(Y \leq x) P(D = 1) \quad (\text{ par indépendante de } D \text{ et } Y) \\ &= \frac{1}{2} P(Y \geq -x) + \frac{1}{2} P(Y \leq x). \end{aligned}$$

(d) La question précédente donne donc

$$F_T(x) = P(T \leq x) = \frac{1}{2}\left(F_Y(x) + 1 - F_Y(-x)\right).$$

En injectant la formule pour la fonction de répartition obtenue dans la partie précédente, on trouve

$$F_T(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2}, & \text{si } x \leq -1 \\ 0, & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 - \frac{1}{2x^2}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On remarque que T suit la même loi que X.

2. Soient $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0;1[)$ et $V = \frac{1}{\sqrt{1-U}}$.

(a) On rappelle que, d'après le cours

$$F_U(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

(b) Par définition, $V > 00$ donc $F_V(x) = 0$ si $x \leq 0$. Pour $x > 00$, on a

$$\begin{aligned} F_V(x) &= P(V \leq x) = P\left(\frac{1}{\sqrt{1-U}} \leq x\right) \\ &= P\left(1 - U \geq \frac{1}{x^2}\right) = P\left(U \leq 1 - \frac{1}{x^2}\right) \\ &= F_U\left(1 - \frac{1}{x^2}\right). \end{aligned}$$

Or,

$$x \leq 1 \Longleftrightarrow 1 - \frac{1}{x^2} \leq 0 \qquad \text{et} \qquad x > 1 \Longleftrightarrow 1 - \frac{1}{x^2} \in]0;1[.$$

Ainsi,

$$F_V(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

et on reconnait la fonction de répartition de Y. Ainsi, V et Y suivent la même loi.

3. (a)

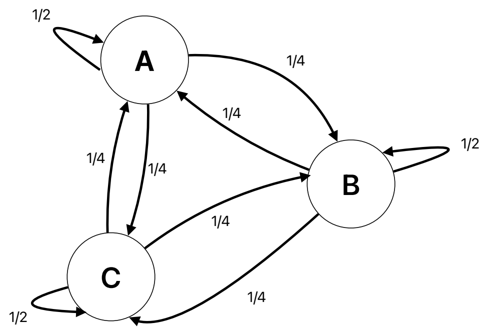
```
def D(n):
    l = []
    for i in range(n):
        tir = rd.random()
        if tir  < 0.5:
            l.append(1)
        else:
            l.append(-1)
    return l
```

(b) Le programme proposé calcule la moyenne empirique d'un $n-$échantillon de T obtenu en simulant D avec la fonction précédente et Y par inversion avec la variable V et la loi uniforme. Pour n assez grand, la valeur affichée sera proche de l'espérance de T, c'est à dire 0.

Exercice 3

Sujet 0 EMLyon, Étude d'une marche aléatoire

Partie I - Modélisation



1.

La matrice de transition comporte dans sa case (i,j) la probabilité que le pion passe du point i au point j (A est représenté par 1, B par 2 et C par 2). Par exemple, dans la case $(1,1)$ on a la probabilité de rester en A, c'est à dire $\frac{1}{2}$, dans la case $(1,2)$ on a la probabilité de passer de A à B, c'est à dire $\frac{1}{4}$...
En adoptant la même démarche pour les autres couples de points, on obtient la matrice de transition :

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

2. (a) On a $p_0 = 1$, $q_0 = 0$, $r_0 = 0$.
En appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements formé par A_0, B_0 et C_0, on obtient :

$$P(A_1) = P(A_0)P_{A_0}(A_1) + P(B_0)P_{B_0}(A_1) + P(C_0)P_{C_0}(A_1) = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ ;$$

ainsi $p_1 = \frac{1}{2}$. De même , $q_1 = \frac{1}{4}$ et $r_1 = \frac{1}{4}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.
On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements formé par A_n, B_n et C_n :

$$P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) \ ;$$

c'est à dire $p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}r_n$.
De même on obtient $q_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{4}r_n$ et $r_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}r_n$.
Calculons :

$$V_nM = \begin{pmatrix} p_n & q_n & r_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}r_n & \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{4}r_n & \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}r_n \end{pmatrix} \ ;$$

ce qui donne, en utilisant les relations établies ci-dessus, $V_n\ M = V_{n+1}$.

(c) On démontre cette propriété par récurrence.
Pour $n = 0$, $V_0M^0 = V_0I_3 = V_0$.
Supposons que pour un certain entier n on ait $V_n = V_0M^n$.
On a alors, d'après la question précédente, $V_{n+1} = V_n\ M$; puis, en utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$V_{n+1} = V_0M^n\ M = V_0M^{n+1} \ .$$

On en conclut, en application du principe de récurrence, que la propriété $V_n = V_0M^n$ est vraie pour tout entier n.

Partie II - Calcul des puissances de la matrice M et application

3. (a) La matrice A est diagonalisable car elle est symétrique.

(b)

$$\begin{aligned} A^2-5A &= \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \\ &= -4I_3 \end{aligned}$$

On en déduit un polynôme annulateur de A : $P(X) = X^2 - 5X + 4$.
Les racines de ce polynôme sont 1 et 4.
Donc les valeurs propres possibles de A sont 1 et 4 (i.e. : $\mathrm{Sp}(A) \subset \{1, 4\}$).

(c) Déterminons tout d'abord les valeurs propres et sous espace propres de A.

— $E_1(A)$.

On a $A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$(A-I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x+y+z=0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -y-z\ .$$

Donc 1 est bien valeur propre et $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

De plus ces deux vecteurs forment une famille libre et donc une base de $E_1(A)$, qui est donc de dimension 2.

— $E_4(A)$.

On a $A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} (A-4I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -2x+y+z &=& 0 \\ x-2y+z &=& 0 \\ x+y-2z &=& 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} -2x+y+z &=& & 0 \\ -3y+3z &=& 0 & (L_2 \leftarrow 2L_2+L_1) \\ 3y-3z &=& 0 & (L_3 \leftarrow 2L_3+L_1) \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -2x+y+ &=& -z \\ y &=& z \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& z \\ y &=& z \end{array}\right. \end{aligned}$$

Donc 4 est bien valeur propre et $E_4(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

De plus ce vecteur forme une famille libre et donc une base de $E_4(A)$, qui est donc de dimension 1.

On déduit de ce qui précède que la somme des dimensions des sous-espaces propres de A est égale à 3.
Donc A est diagonalisable.
Plus précisément, on a $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

Déterminons enfin P^{-1}. Pour cela on résoud, pour $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, $P\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$:

$$P\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -x+z &=& a\\ -y+z &=& b\\ x+y+z &=& c\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} -x+z &=& a &\\ -y+z &=& b &\\ y+2z &=& a+c & (L_3\leftarrow L_3+L_1)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} -x+z &=& a &\\ -y+z &=& b &\\ 3z &=& a+b+c & (L_3\leftarrow L_3+L_2)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -a+\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c\right)=-\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c\\ y &=& -b+\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c\right)=\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}b+\frac{1}{2}c\\ z &=& \frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c\end{array}\right.$$

D'où

$$P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

(d) Démontrons cette relation par récurrence.
- Pour $n=0$, on a $A^0=I_3$ et $PD^0P^{-1}=PI_3P^{-1}=I_3$; donc la relation est vérifiée.
- Supposons que pour un certain entier n, $A^n=PD^nP^{-1}$.
  On a alors $A^{n+1}=A^nA$.
  Or par hypothèse de récurrence, $A^n=PD^nP^{-1}$ et d'après le (c), $A=PDP^{-1}$.
  On en déduit que $A^{n+1}=PD^nP^{-1}PDP^{-1}=PD^nDP^{-1}=PD^{n+1}P^{-1}$.
  Donc la relation est vérifiée au rang $n+1$.
- On en conclut que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $A^n=PD^nP^{-1}$.

4. Cherchons trois nombres x, y et z positifs, de somme 1, et tels que

$$\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}M\ .$$

Cette égalité se traduit par le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}z &=& x\\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}z &=& y\\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}z &=& z\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -2x+y+z &=& 0\\ x-2y+z &=& 0\\ x+y-2z &=& 0\end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions dece système est $\texttt{Vect}(1,1,1)$.
La chaîne de Markov associée au graphe probabiliste de la question 1 a donc un état stable : $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

5. Soit $n\in\mathbb{N}$.

(a) On utilise les résultats des questions précédentes :

$$M^n=\left(\frac{1}{4}A\right)^n=\left(\frac{1}{4}\right)^n PD^nP^{-1}\ .$$

On a :

$$\begin{aligned} D^nP^{-1} &= \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4^n\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&1\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\4^n&4^n&4^n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Puis

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n PD^nP^{-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4^n & 4^n & 4^n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3\ 4^n} \begin{pmatrix} 2+4^n & -1+4^n & -1+4^n \\ -1+4^n & 2+4^n & -1+4^n \\ -1+4^n & -1+4^n & 2+4^n \end{pmatrix}$$

(b) On utilise ensuite le résultat de la question 2(c) : $V_n = V_0\ M^n$:

$$V_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{3\ 4^n} \begin{pmatrix} 2+4^n & -1+4^n & -1+4^n \\ -1+4^n & 2+4^n & -1+4^n \\ -1+4^n & -1+4^n & 2+4^n \end{pmatrix} \ ;$$

puis

$$V_n = \frac{1}{3\ 4^n} \begin{pmatrix} 2+4^n & -1+4^n & -1+4^n \end{pmatrix} \ ;$$

ce qui donne : $p_n = \dfrac{1}{3\ 4^n}(2+4^n) = \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{4^n}\right)$, $q_n = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$ et $r_n == \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$.

6. On a $\lim_n p_n = \frac{1}{3}$, $\lim_n q_n = \frac{1}{3}$ et $\lim_n r_n = \frac{1}{3}$.
Ainsi (V_n) converge vers l'état stable.

Partie III - Nombre moyen de passages en A et temps d'attente avant le premier passage en B

7. (a) La variable aléatoire S_n représente le nombre de passages au point A lors des n premiers sauts.
Son espérance $\mathbb{E}(S_n)$ représente le nombre moyen de passages au point A lors des n premiers sauts.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La variable aléatoire X_n suit un loi de Bernoulli de paramètre $P(X_n = 1)$, c'est à dire p_n.
On a donc $E(X_n) = p_n$.

(c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre moyen de passage en A entre l'étape 1 et l'étape n est donc :

$$E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \sum_{k=1}^{n} p_k \ .$$

En utilisant le résultat de la question 5. on obtient :

$$E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{4^k}\right) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} 1 \ + \ \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^k \ ;$$

puis

$$E(S_n) = \frac{1}{3}\ n \ + \ \frac{2}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} = \frac{n}{3} \ + \ \frac{2}{9}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \ .$$

8. (a) $[T_B = 1] = B_1$, donc $P(T_B = 1) = P(B_1) = q_1 = \dfrac{1}{4}$.
$[T_B = 2] = (A_1 \cap B_2) \cup (C_1 \cap B_2)$ (union disjointe) donc

$$P(T_B = 2) = P(A_1)P_{A_1}(B_2) + P(C_1)P_{C_1}(B_2) = \frac{1}{2}\ \frac{1}{4} \ + \ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4} \ = \ \frac{3}{16} \ .$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. 0n a $\overline{B_n} = A_n \cup C_n$ (union disjointe).

(c) On a $\overline{B_2} \cap \overline{B_1} = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap A_2) \cup (C_1 \cap C_2)$ (union disjointe),
donc

$$B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1} = (B_3 \cap A_1 \cap A_2) \cup (B_3 \cap A_1 \cap C_2) \cup (B_3 \cap C_1 \cap A_2) \cup (B_3 \cap C_1 \cap C_2) \ ;$$

et donc

$$P\left(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1}\right) = P(B_3 \cap A_1 \cap A_2) + P(B_3 \cap A_1 \cap C_2) + P(B_3 \cap C_1 \cap A_2) + P(B_3 \cap C_1 \cap C_2) \ .$$

Or
$$P\left(B_3 \cap A_1 \cap A_2\right) = P\left(A_1 \cap A_2\right) P_{A_1 \cap A_2}(B_3) = P\left(A_1 \cap A_2\right) P_{A_2}(B_3) \ ;$$
la dernière égalité étant due au premier point de la définition du processus : le mouvement entre l'étape n et l'étape $n+1$ ne dépend que de la position à l'étape n. Il en est de même pour les trois autres termes de la somme ; on a ainsi :

$$P\left(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1}\right) = P\left(A_1 \cap A_2\right) P_{A_2}(B_3) + P\left(A_1 \cap C_2\right) P_{C_2}(B_3) + P\left(C_1 \cap A_2\right) P_{A_2}(B_3) + P\left(C_1 \cap C_2\right) P_{C_2}(B_3) \ ;$$

ainsi :

$$\begin{aligned} P\left(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1}\right) &= P\left(A_1 \cap A_2\right) \frac{1}{4} + P\left(A_1 \cap C_2\right) \frac{1}{4} + P\left(C_1 \cap A_2\right) \frac{1}{4} + P\left(C_1 \cap C_2\right) \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4}\left(P\left(A_1 \cap A_2\right) + P\left(A_1 \cap C_2\right) + P\left(C_1 \cap A_2\right) + P\left(C_1 \cap C_2\right)\right) \\ &= \frac{1}{4} P\left(\overline{B_2} \cap \overline{B_1}\right) \end{aligned}$$

On en déduit que
$$P_{\overline{B_2} \cap \overline{B_1}}\left(B_3\right) = \frac{P\left(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1}\right)}{P\left(\overline{B_2} \cap \overline{B_1}\right)} = \frac{1}{4} \ .$$

Dans la suite de l'exercice, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note D_n l'événement $\bigcap_{k=1}^{n} \overline{B_k}$ et on admettra que : $P_{D_n}\left(B_{n+1}\right) = \frac{1}{4}$.

(d) Remarquons que l'on déduit également de la question précédente que
$$P_{D_n}\left(\overline{B_{n+1}}\right) = \frac{3}{4} \ .$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :
$$[T_B = k] = \overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_{k-1}} \cap B_k \ ;$$
donc
$$P\left(T_B = k\right) = P\left(\overline{B_1}\right) P_{D_1}\left(\overline{B_2}\right) \dots P_{D_{k-2}}\left(\overline{B_{k-1}}\right) P_{D_{k-1}}\left(B_k\right) \ .$$
En utilisant le résultat de la question précédente on obtient
$$P\left(T_B = k\right) = \frac{3}{4} \, \frac{3}{4} \dots \frac{3}{4} \, \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \, \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \ .$$

On a
$$\sum_{k=1}^{+\infty} P\left(T_B = k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4} \, \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} = \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 1 \ .$$

Or on doit avoir
$$\sum_{k=0}^{+\infty} P\left(T_B = k\right) = 1 \ .$$

On en déduit que $P\left(T_B = 0\right) = 0$.
Remarque T_B suit une loi géométrique de paramètre $1/4$.

(e) On a, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $kP\left(T_B = k\right) = k\frac{1}{4} \, \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$. Ainsi la série de terme général $kP\left(T_B = k\right)$ converge absolument (série géometrique dérivée de paramètre $3/4$.
On en déduit que la variable aléatoire T_B admet une espérance et que l'on a :

$$E(T_B) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4} \, k \, \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} = \frac{1}{4} \frac{1}{\left(1 - \frac{3}{4}\right)^2} = 4 \ .$$