DS n°6 : Concours Blanc

le 25/02/2025
Durée : 4h

— L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
— La clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une grande part dans la notation.
— Le résultat d'une question peut être admis afin de traiter une question suivante.
— On encadrera le résultat de chaque question.

Exercice 1

Deux systèmes différentiels

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Le but de cette question est de diagonaliser la matrice A.
   (a) Justifier que la matrice A est de rang 1 .
   (b) En déduire une valeur propre A et déterminer une base du sous-espace propre associé.
   (c) Justifier que 6 est valeur propre de A et qu'un vecteur propre associé est $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   (d) Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que
   $$A = PDP^{-1} .$$
2. Résoudre le système différentiel :
$$(SH) \begin{cases} x' = x + 2y - z \\ y' = 2x + 4y - 2z \\ z' = -x - 2y + z \end{cases}$$
3. Soient $X_1 : t \mapsto X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix}$ et $X_2 : t \mapsto X_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$ deux solutions du système (SH).
   On suppose qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ vérifiant $X_1(t_0) = X_2(t_0)$.
   Que pouvez-vous dire de X_1 et X_2 ?
4. (a) Déterminer la solution $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ du système (SH) vérifiant $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (b) Déterminer la solution $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ du système (SH) vérifiant $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
5. Dans cette question on considère trois fonctions continues $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On s'intéresse au système différentiel :
$$(S) \begin{cases} x' = x + 2y - z + a(t) \\ y' = 2x + 4y - 2z + b(t) \\ z' = -x - 2y + z + c(t) \end{cases}$$
   où x, y et z sont des fonctions de classe C^1, inconnues, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de la variable réelle t.
   Une solution de (S) sur $\mathbb{R}$ est une application $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ où x, y et z sont des fonctions de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout t réel, on ait :

$$\begin{cases} x'(t) & = x(t) + 2y(t) - z(t) + a(t) \\ y'(t) & = 2x(t) + 4y(t) - 2z(t) + b(t) \\ z'(t) & = -x(t) - 2y(t) + z(t) + c(t) \end{cases}$$

(a) Préciser quel vecteur colonne $B(t) \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dépendant de la variable réelle t permet d'écrire le système (S) sous la forme :

$$(S) \quad X' = AX + B(t)$$

(b) Soit Y une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de (S). Démontrer que $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ est solution de (S) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $Z : t \mapsto X(t) - Y(t)$ est solution de (SH) sur $\mathbb{R}$, (SH) désignant le système de la question 2 .

(c) Dans cette question, on pose pour $t \in \mathbb{R} : a(t) = 1, b(t) = 2\left(1 - \mathrm{e}^t\right), c(t) = \mathrm{e}^t - 1$.

Démontrer que $Y : t \mapsto Y(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est solution de (S) sur $\mathbb{R}$.

En déduire toutes les solutions du système différentiel (S) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

On suppose que toutes les variables aléatoires présentées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^3} & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{si } -1 < t < 1 \\ -\dfrac{1}{t^3} & \text{si } t \leq -1 \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction f est paire.
2. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ converge et calculer sa valeur.
3. (a) À l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout réel A strictement supérieur à 1, on a : $\displaystyle\int_{-A}^{-1} f(t)\, dt = \int_1^A f(u)\, du$.

   En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)\, dt$ converge et donner sa valeur.

   (b) Montrer que la fonction f est une densité de probabilité.
4. On considère une variable aléatoire X admettant f pour densité. On note F_X la fonction de répartition de X.

   (a) Montrer que, pour tout réel x, on a :

$$F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \leq -1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

(b) Démontrer que X admet une espérance, puis que cette espérance est nulle.

(c) La variable aléatoire X admet-elle une variance ?

5. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = |X|$.

(a) Donner la fonction de répartition de Y, et montrer que Y est une variable aléatoire à densité.

(b) Montrer que Y admet pour densité la fonction f_Y définie par :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(c) Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

Partie B

1. Soit D une variable aléatoire prenant les valeurs -1 et 1 avec équiprobabilité, indépendante de la variable aléatoire Y.
Soit T la variable aléatoire définie par $T = DY$.

(a) Déterminer la loi de la variable $Z = \dfrac{D+1}{2}$. En déduire l'espérance et la variance de D.

(b) Justifier que T admet une espérance et préciser sa valeur.

(c) Montrer que pour tout réel x, on a :

$$P(T \leq x) = \frac{1}{2}\, P(Y \leq x) + \frac{1}{2}\, P(Y \geq -x)$$

(d) En déduire la fonction de répartition de T.

2. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1[$ et V la variable aléatoire définie par :

$$V = \frac{1}{\sqrt{1-U}}\ .$$

(a) Rappeler la fonction de répartition de U.

(b) Déterminer la fonction de répartition de V et vérifier que les variables V et Y suivent la même loi.

3. (a) On suppose que les bibliothèques `Numpy` et `Numpy.random` ont été importées par les commandes :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

Écrire une fonction en langage `Python`, d'en-tête `def D(n):`, qui prend un entier $n \geq 1$ en entrée, et renvoie une liste contenant n réalisations de la variable aléatoire D.

(b) On considère le script suivant :

```
n = int(input("entrer n "))
a = D(n)
b = [ rd.random() for i in range(n)]
c = [ a[i]/np.sqrt(1-b[i])  for i in range(n)]
print(np.mean(c))
```

De quelle variable aléatoire les coefficients du vecteur `c` sont-ils une simulation ? Pour `n` assez grand, quelle sera la valeur affichée ? Justifier votre réponse.

Exercice 3

Étude d'une marche aléatoire

On considère trois points distincts du plan A, B et C. Le but de l'exercice est d'étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points.

A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A. Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

— le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n+1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n : il ne dépend donc pas des positions occupées aux autres étapes précédentes.

— pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

— A_n l'évènement «le pion se trouve en A à l'étape n˘,

— B_n l'évènement «le pion se trouve en B à l'étape n˘

— C_n l'évènement «le pion se trouve en C à l'étape n˘.

Pour tout n entier naturel, on note également : $p_n = P(A_n), q_n = P(B_n), r_n = P(C_n)$ ainsi que $V_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n & r_n \end{pmatrix}$, le n-ème état de cette chaîne de Markov.

Partie I - Modélisation

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste et expliquer pourquoi la matrice de transition est :

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

2. (a) Déterminer p_0, q_0, r_0 ainsi que p_1, q_1, r_1.
   (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la relation : $V_{n+1} = V_n M$.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $V_n = V_0 M^n$.

Partie II - Calcul des puissances de la matrice M et application

3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Justifier que la matrice A est diagonalisable.
   (b) Calculer $A^2 - 5A$.
   Quelle sont les valeurs propres possibles de A ?
   (c) Déterminer une matrice inversible P ainsi qu'une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.
   On calculera la matrice P^{-1}.
   (d) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $A^n = PD^nP^{-1}$.

4. La chaîne de Markov associée au graphe probabiliste de la question 1 a-t-elle un état stable ? Lequel ?

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Démontrer que : $M^n = \frac{1}{3\cdot 4^n}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}$, où M est la matrice introduite à la question 1.
   (b) Démontrer que $p_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{4^n}\right)$ et déterminer alors une expression de q_n et r_n.

6. Déterminer les limites respectives des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}, (q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Interpréter ces résultats.

Partie III - Nombre moyen de passages en A et temps d'attente avant le premier passage en B

7. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire :

$$X_n = \begin{cases} 1 \text{ si } A_n \text{ est réalisé} \\ 0 \text{ si } \overline{A_n} \text{ est réalisé} \end{cases}$$

   (a) Interpréter la variable aléatoire $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
   Quelle est la signification de l'espérance $\mathbb{E}(S_n)$?

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_n.

   (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre moyen de passage en A entre l'étape 1 et l'étape n.

8. On définit la variable aléatoire T_B de la façon suivante : T_B est le numéro de l'étape à laquelle le pion passe pour la première fois en B, et dans le cas où le point ne passe jamais en B, on pose $T_B = 0$.
   Le but de cette question est de déterminer la loi de la variable aléatoire T_B ainsi que son espérance.

   (a) Calculer les probabilités $P(T_B = 1)$ et $P(T_B = 2)$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer l'événement $\overline{B_n}$ à l'aide des événements A_n et C_n.

   (c) Démontrer que $P\left(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1}\right) = \frac{1}{4} P\left(\overline{B_2} \cap \overline{B_1}\right)$.
   En déduire que $P_{\overline{B_2} \cap \overline{B_1}}(B_3) = \frac{1}{4}$.
   Dans la suite de l'exercice, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note D_n l'événement $\bigcap_{k=1}^{n} \overline{B_k}$ et on admettra que : $P_{D_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{4}$.

   (d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité $P(T_B = k)$.
   En déduire la probabilité $P(T_B = 0)$.

   (e) Justifier que la variable aléatoire T_B admet une espérance. Quelle est l'espérance de T_B ?