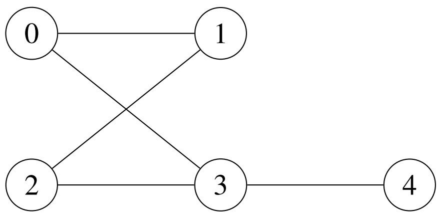
Edhec Maths appliquées 2023

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies `numpy`, `numpy.random` *et* `numpy.linalg` *de* `Python` *sont importées avec les commandes respectives* `import numpy as np`, `import numpy.random as rd` *et* `import numpy.linalg as al`.

Exercice 1

On considère le graphe G suivant et on note A la matrice d'adjacence de G.



1) Déterminer la matrice A en expliquant sa construction.

2) **a:** Par lecture du graphe, donner (en listant leurs sommets) les chaînes de longueur 3 reliant les sommets 2 et 3. Combien y en a-t-il ?

b: On considère la fonction `Python` suivante :

```
def f(M,k):
      N=al.matrix_power(M,k)
      return N
```

On suppose que l'on a saisi la matrice A et on considère les instructions :

```
B=f(A,...)
n=B[...]
print(n)
```

Compléter ces instructions pour qu'elles permettent l'affichage du nombre trouvé à la question 2) a.

On note D la matrice diagonale, appelée matrice des degrés de G, dont l'élément diagonal situé à la ligne i et à la colonne i est le degré du sommet numéro i (ceci étant valable pour tout $i \in [\![1,5]\!]$).
On définit également la matrice L, appelée matrice laplacienne de G, en posant $L = D - A$.
On note λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5 les valeurs propres non nécessairement distinctes de L et on suppose $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \lambda_4 \leqslant \lambda_5$.

3) **a:** Déterminer la matrice D.

b: Vérifier que l'on a $L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

c: Pourquoi la matrice L est-elle diagonalisable ?

4) On se propose dans cette question de montrer que les valeurs propres de L sont positives ou nulles et que $\lambda_1 = 0$.

Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a: On identifie une matrice de $\mathscr{M}_1(\mathbf{R})$ à un réel.
À quel ensemble appartient la quantité ${}^tXLX$?

b: Exprimer ${}^tXLX$ en fonction de a, b, c, d et e puis monter que l'on a :

$${}^tXLX = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 + (e-d)^2$$

c: On suppose que X est un vecteur propre de L associé à une certaine valeur propre λ.
Déterminer LX puis ${}^tXLX$ en fonction de λ, a, b, c, d et e.
En déduire que les valeurs propres de L sont positives ou nulles.

d: Déterminer LU et en déduire que $\lambda_1 = 0$.

5) **a:** À l'aide de la question 3) b, montrer l'équivalence :

$$LX = 0 \Longleftrightarrow X \in \text{Vect}(U)$$

b: Conclure que λ_2, λ_3, λ_4, et λ_5 sont des réels strictement positifs.

Exercice 2

1) Donner un exemple d'une fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ pour laquelle il existe un réel K élément de $]0,1[$ tel que, pour tout couple (x,y) de réels, on ait :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant K \times |x-y| \qquad (*)$$

On considère pour toute la suite une fonction f vérifiant la condition précédente.
On dit que f est K-contractante.

2) Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}$.

3) À l'aide de la relation (*), montrer par l'absurde que l'équation $f(x) = x$ admet au plus une solution.

4) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par la donnée du réel u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ valable pour tout entier naturel n.

a: Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$|u_{n+1} - u_n| \leqslant K^n\,|u_1 - u_0|$$

b: Établir la convergence de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$, puis en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente. On note a sa limite.

c: Conclure que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution.

5) On désigne par n et p des entiers naturels (avec $p \geqslant 1$).

a: Justifier que l'on a : $\displaystyle\sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i| \leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i \times |u_1 - u_0|$

b: En déduire l'inégalité :

$$|u_{n+p} - u_n| \leqslant K^n \times \frac{1-K^p}{1-K} \ |u_1 - u_0|$$

c: Établir enfin l'inégalité suivante :

$$|a - u_n| \leqslant \frac{K^n}{1-K} \times |u_1 - u_0|$$

6) *Étude d'un exemple :* on considère la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbf{R} \qquad f(t) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}$$

a: Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$, puis calculer $f'(t)$ et $f''(t)$ pour tout réel t.

b: Déterminer les variations de f' sur $\mathbf{R}$ et établir enfin l'inégalité :

$$\forall t \in \mathbf{R} \qquad |f'(t)| \leqslant \frac{1}{4}$$

c: En déduire que f est $\frac{1}{4}$-contractante.

d: On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par la donnée du réel u_0 et la relation de récurrence
$u_{n+1} = f(u_n)$ valable pour tout entier naturel n.
Montrer que cette suite est convergente.
On note toujours a sa limite.

e: Compléter la fonction `Python` ci-dessous afin qu'elle renvoie, pour une valeur donnée de n, la valeur de u_n à l'appel de `suite(n)` :

```python
def suite (n):
    u= ....
    for k in range (1,n+1):
        u= ....
    return u
```

f: En s'appuyant sur le résultat de la question 5) c, établir que u_n est une valeur approchée de a à moins de 10^{-3} près dès que n vérifie $\quad 4^n \geqslant \dfrac{2000}{3}$

g: En déduire un programme `Python`, utilisant la fonction précédente, qui calcule la valeur approchée de a qui en résulte.

Exercice 3

On considère deux réels a et b ainsi que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

1) **a:** Montrer que si $a = b$, alors A ne possède qu'une seule valeur propre.

b: En déduire par l'absurde que, si $a = b$, la matrice A n'est pas diagonalisable.

2) On suppose dans cette question que $a \neq b$.

a: Quelles sont les valeurs propres de A ?

b: Calculer $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$.

Qu'en déduire pour les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$?

c: Montrer que la famille $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ puis écrire la matrice P de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ à la base $\mathscr{B}$.

d: Déterminer une matrice diagonale D telle que $AP = PD$, puis conclure que A est diagonalisable.

3) On considère deux variables aléatoires, X et Y, indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

a: Établir l'égalité :

$$P(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n)P(Y = n)$$

b: En déduire explicitement $P(X = Y)$.

4) **a:** Soit $A(X,Y)$ la matrice aléatoire définie par $A(X,Y) = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$.

Déterminer la probabilité p pour que $A(X,Y)$ ne soit pas diagonalisable.

b: On considère le script Python suivant :

```
m=int(input('entrez une valeur entière pour m :'))
c=0
for k in range(m):
    X=rd.geometric(1/2)
    Y=rd.geometric(1/2)
    if X==Y:
        c=c+1
i=1-c/m
print(i)
```

Pour de grandes valeurs de l'entier naturel m, de quel réel le contenu de la variable `i` est-il proche ?

Problème

Partie 1 : propriété d'une loi de probabilité

On désigne par c un réel strictement positif et on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^{1+c}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

1) Montrer que f peut être considérée comme une densité.

On considère dans la suite une variable X de densité f et on note F sa fonction de répartition.
On dit que X suit la loi de Pareto de paramètre c.

2) Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $F(x)$ en fonction de x et c.

3) Soit t un réel strictement supérieur à 1.

a: Déterminer, en distinguant les cas $x \geqslant 1$, et $x < 1$ la probabilité conditionnelle $P_{(X>t)}(X \leqslant tx)$.

b: En déduire que la loi de $\frac{X}{t}$, conditionnellement à l'événement $(X > t)$, est la loi de X.

Partie 2 : réciproque de la propriété précédente

On considère une variable aléatoire Y de densité g nulle sur $]-\infty, 1[$, strictement positive et continue sur $[1, +\infty[$.
On pose $c = g(1)$ et on note G la fonction de répartition de Y.
Dans toute la suite, on suppose que, pour tout réel strictement supérieur à 1, on a :

- $P(Y > t) > 0$
- La loi de $\dfrac{Y}{t}$, conditionnellement à l'événement $(Y > t)$, est la loi de Y.

On veut alors montrer que Y suit une loi de Pareto de paramètre c.

4) Justifier que $G(1) = 0$.

5) **a:** Établir l'égalité :

$$\forall x \geqslant 1, \forall t > 1, \quad G(x) = \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}$$

b: Justifier que G est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ et en déduire que :

$$\forall x > 1, \forall t > 1, \quad G'(x) = \frac{tG'(tx)}{1 - G(t)}$$

c: Montrer enfin la relation :

$$\forall t > 1, \qquad G(t) + \frac{t}{c}\, G'(t) = 1$$

6) Dans cette question, la lettre y désigne une fonction de classe C^1 sur $]1, +\infty|$ qui, à tout réel t de $]1, +\infty[$, associe $y(t)$.

On note (E_1) l'équation différentielle $\quad y + \dfrac{t}{c}\, y' = 0$
et (E_2) l'équation différentielle $\quad y + \dfrac{t}{c}\, y' = 1$.

Il convient de noter que ces équations différentielles ne sont pas à coefficients constants.

a: Soit z la fonction définie par $z(t) = t^c\, y(t)$. Montrer que y est solution de l'équation différentielle (E_1) si et seulement si z est constante sur $]1, +\infty[$.

b: En notant K la constant évoquée à la question 6) a : , donner toutes les solutions de (E_1).

c: Trouver une fonction u, constante sur $]1, +\infty[$, et solution de l'équation différentielle (E_2).

d: Montrer l'équivalence : $\quad h$ solution de $(E_2) \Longleftrightarrow h - u$ solution de (E_1)

e: En déduire que les solutions de l'équation différentielle (E_2) sont les fonctions h définies par :

$$\forall t > 1, \qquad h(t) = 1 + \frac{K}{t^c}$$

7) **a:** Montrer finalement que l'on a :

$$\forall t > 1, \quad G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}$$

b: Vérifier que cette relation s'étend à $[1, +\infty[$, puis conclure quant à la loi de Y.

Partie 3 : simulation d'une variable suivant la loi de Pareto de paramètre c

8) On pose $Z = \ln(X)$ et on admet que Z est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X. On note H sa fonction de répartition.

a: Pour tout réel x, exprimer $H(x)$ à l'aide de la fonction F.

b: En déduire sue Z suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

c: Écrire une fonction `Python` d'en-tête `simulX(c)` et permettant de simuler X.

FIN DU SUJET
