Feuille d'exercices n°12 : Convergences et approximations

1 Convergence et approximation

Exercice 1. – **Inégalité de Markov** – Rappeler l'inégalité de Markov ; démontrer celle-ci lorsque X est une variable aléatoire à densité.

Exercice 2. – **Application de l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev** – On lance de manière répétée un dé équilibré.

1. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, majorer la probabilité que la différence entre la fréquence d'apparition du 6 et 1/6 soit supérieure à 1/100.
2. En déduire un nombre de lancers suffisant pour que cette probabilité soit inférieure à 5%.

Exercice 3. – **Application du théorème central limite** – On reprend les notations de l'exercice précédent.

1. À l'aide du théorème central limite, estimer la probabilité que la différence entre la fréquence d'apparition du 6 et 1/6 soit supérieure à 1/100.
2. En déduire un nombre de lancers suffisant pour que cette probabilité soit inférieure à 5%.

Exercice 4. – **Application du théorème central limite** – On aura besoin pour cet exercice d'une table de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
On lance un dé équilibré 100 fois.

1. En utilisant le théorème central limite (sous l'aspect approximation de loi), déterminer une valeur approchée de la probabilité que la somme obtenue soit comprise entre 340 et 360.
2. Déterminer r tel que la probabilité que la somme obtenue soit comprise entre $350-r$ et $350+r$ soit égale à $0,95$.

Exercice 5. – **Convergence en loi** – Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et suivant la même loi exponentielle de paramètre 1.
On pose $Z_n = \sup(X_1, ..., X_n) - \ln(n)$.

1. On pose $Y_n = \sup(X_1, ..., X_n)$. Déterminer la fonction de répartition de Y_n.
2. Déterminer la loi de Z_n (sa fonction de répartition).
3. Soit $Z = -\ln X$ où X suit la loi exponentielle de paramètre 1. Donner la loi de Z (sa fonction de répartition).
4. Montrer que la suite (Z_n) converge en loi vers Z.

2 Estimation

Exercice 6. – Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, \theta]$, θ étant un réel strictement positif. On note F la fonction de répartition et f une densité de X.
On dispose d'un échantillon $(X_1, ..., X_n)$ de la loi de X (les X_i sont indépendantes) et on note $Z_n = \sup(X_1, ..., X_n)$.

1. Déterminer la fonction de répartition F_n ainsi qu'une densité f_n de Z_n.
2. On envisage d'estimer θ à l'aide de Z_n.
   (a) Déterminer l'espérance de Z_n.
   En déduire un estimateur de θ, noté β_n, obtenu en utilisant Z_n, tel que $E(\beta_n) = \theta$.
   Remarque : un tel estimateur est dit sans biais.
   (b) Déterminer la variance de β_n.
   (c) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que β_n est un estimateur convergent de θ.

Exercice 7. – Soit $\theta > 0$.
On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} e^{\theta - x} & \text{si} \quad x \geq \theta \\ 0 & \text{si} \quad x < \theta \end{cases}$

1. (a) Vérifier que pour tout réel $A \geq \theta$, $\int_\theta^A f(x)\mathrm{dx} = 1 - e^{\theta - A}$.
   (b) Montrer que f est une densité.
   On note X une variable aléatoire de densité f.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. On considère la variable aléatoire $Y = X - \theta$.
   (a) Montrer que la fonction de répartition F_Y de Y est définie par : $F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-y} & \text{si} \quad y \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y < 0 \end{cases}$
   (b) En déduire que Y est une variable à densité qui suit une loi classique dont précisera le paramètre. Préciser son espérance et sa variance.
   (c) En déduire l'espérance et la variance de X.
4. Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul et $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi que X. On cherche à estimer le réel θ à l'aide de la variables aléatoire $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (X_k - 1)$.
   (a) Montrer que $E(S_n) = \theta$.
   (b) Calculer $V(S_n)$ et en déduire que (S_n) est un estimateur convergent de θ.

Exercice 8. – Une entreprise fabrique à la chaîne des cartouches d'imprimante. Chaque cartouche a une probabilité p d'être défectueuse.
En bout de chaîne une machine détecte à coup sûr les cartouches défectueuses et les retire de la chaîne.

1. **Dans cette question**, on suppose que l'on connait la valeur de la probabilité p et qu'elle est égale à $\dfrac{2}{100}$.
   L'entreprise fabrique en une heure 100 cartouches dont les défauts éventuels sont indépendants les uns des autres.
   Soit X la variable aléatoire égale au nombre de cartouches défectueuses détectées en bout de chaine durant cette période.

   (a) Reconnaître la loi de X. On donnera l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X ainsi que l'expression de $P(X=k)$ pour tout entier k appartenant à $X(\Omega)$.

   (b) Calculer l'espérance et la variance de X.

2. **Dans cette question**, la valeur de p est inconnue et on cherche à l'estimer. Pour cela on fait tester par la machine n cartouches ($n \geq 1$). Pour tout i compris entre 1 et n, on note X_i la variable aléatoire de Bernoulli égale à 1 si la $i^{\text{ième}}$ cartouche est défectueuse et égale à 0 sinon.
   On suppose que les variables aléatoires X_i sont indépendantes.
   On note $M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

   (a) Rappeler, pour i compris entre 1 et n, l'espérance et la variance de X_i.

   (b) Calculer $E\left(M_n\right)$. En déduire que M_n est un estimateur sans biais de p (c'est à dire $E(M_n)=p$).

   (c) Calculer $V\left(M_n\right)$.

   (d) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $p(1-p) \leq \dfrac{1}{4}$.
   Montrer, en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que : $P\left(|M_n - p| \geq \varepsilon\right) \leq \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$.

   (e) Soit $\alpha \in]0;1[$. Montrer que si $\varepsilon = \dfrac{1}{\sqrt{4n\alpha}}$ alors $[M_n - \varepsilon; M_n + \varepsilon]$ est un intervalle de confiance pour p au niveau de confiance $1-\alpha$.

Exercice 9. – Dans cet exercice, θ désigne un réel strictement positif et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour tout k de $\mathbb{N}$, on pose : $u_k = \dfrac{1}{1+\theta}\left(\dfrac{\theta}{1+\theta}\right)^k$.

1. Montrer que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définit bien une loi de probabilité.
   On considère maintenant une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et dont la loi est donnée par :
   $$\forall k \in \mathbb{N}, P(X=k) = u_k$$

2. (a) On pose $Y = X+1$. Reconnaître la loi de Y, puis en déduire l'espérance et la variance de X.

   (b) Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle simule la loi d'une variable aléatoire X.

```
import numpy.random as rd
def simulX(theta):
    Y = ...
    while ...
        Y = ...
    X =...
    return X
```

3. Dans cette question, on souhaite estimer le paramètre θ par la méthode du maximum de vraisemblance. Pour ce faire, on considère un échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ composé de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que X et on intoduit la fonction L, de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}_+^*, \quad L(\theta) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k = x_k)$$

où $x_1, x_2, \dots, x_n$ désignent des entiers naturels éléments de $X(\Omega)$.

L'objectif est de choisir la valeur de θ qui rend $L(\theta)$ maximale.

(a) Ecrire $\ln(L(\theta))$ en fontion de θ et de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$.

(b) On consière la fonction φ, définie par :

$$\forall \theta \in]0; +\infty[, \varphi(\theta) = S_n \ln \theta - (S_n + n) \ln(1 + \theta)$$

Montrer que la fonction φ admet un maximum, atteint en un seul réel que l'on notera $\hat{\theta_n}$ et que l'on exprimera en fonction de S_n. Que représente $\hat{\theta_n}$ pour la fonction L?

On pose dorénavant : $T_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$. La variable T_n est appelée estimateur du maximum de vraisemblance pour θ.

(c) Vérifier que $E(T_n) = \theta$.

(d) Calculer la variance de T_n et vérifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} V(T_n) = 0$.
En déduire que T_n est un estimateur convergent de θ.