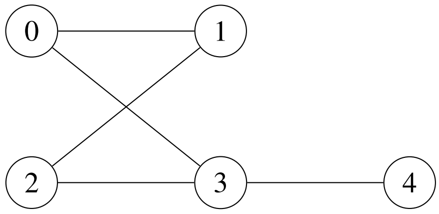
Edhec Maths appliquées 2023 : corrigé

Exercice 1

On considère le graphe G suivant et on note A la matrice d'adjacence de G.



1) On rappelle la définition de la matrice $A = (a_{i,j})$, adaptée à la numérotation des sommets commençant à 0.

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i-1 \text{ est lié à } j-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cela donne $\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$

2) **a:** Les chaînes de longueur 3 reliant les sommets 2 et 3 sont les suivantes :

$$\boxed{[2,1,0,3], [2,1,2,3], [2,3,0,3], [2,3,2,3], [2,3,4,3]}$$

Il y en a donc 5.

b: Le cours sur les graphes permet d'affirmer que le nombre de chemins de longueur k permettant d'aller du sommet i à un sommet j se trouve dans l'élément $a_{i,j}$ de A^k. Donc le programme Python complet demandé :

```python
import numpy as np
import numpy.linalg as al

def f(M,k):
    N=al.matrix_power(M,k)
    return N

A=np.array([[0,1,0,1,0],[1,0,1,0,0],[0,1,0,1,0],
              [1,0,1,0,1],[0,0,0,1,0]])
B=f(A,3)
n=B[2,3]
print(n)
```

3) **a:** Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité. Donc

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

b: La vérification $L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est surtout utile pour vérifier que l'on n'a pas fait d'erreurs précédemment.

c: $\boxed{L \text{ est diagonalisable car symétrique}}$

4) **a:** Posons $R = {}^tXLX$. On peut raisonner sur les dimensions des matrices (n,p) (avec n nombre de lignes et p nombre de colonnes. Ici $n = 5$.
X a pour dimensions $(n,1)$, donc LX a pour dimensions $(n,1)$.
${}^tX$ a pour dimensions $(1,n)$, donc R a pour dimensions $(1,1)$.
Ainsi $\boxed{{}^tXLX \text{ est un réel}}$

b: $LX = \begin{pmatrix} 2a-b-d \\ -a+2b-c \\ -b+2c-d \\ -a-c+3d-e \\ -d+e \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} {}^tXLX &= a(2a-b-d)+b(-a+2b-c)+c(-b+2c-d) \\ &\quad +d(-a-c+3d-e)+e(-d+e) \\ &= 2a^2+2b^2+2c^2+3d^2+e^2-2ab-2ad-2bc-2cd-2de \end{aligned}$$

Posons $r = (a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2+(e-d)^2$

$$\begin{aligned} r &= a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2cd+d^2+d^2-2ad+a^2+e^2-2ed+d^2 \\ &= 2a^2+2b^2+2c^2+3d^2+e^2-2ab-2ad-2bc-2cd-2de \end{aligned}$$

On a bien l'égalité : ${}^tXLX = (a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2+(e-d)^2$

c: On suppose que X est un vecteur propre de L associé à une certaine valeur propre λ.
On a $LX = \lambda X$ puis ${}^tXLX = \lambda\, {}^tXX = \lambda(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)$

$$\boxed{{}^tXLX = \lambda\, {}^tXX = \lambda(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)}$$

D'après la question précédente, ${}^tXLX$ est un réel positif (somme de carrés). Donc nécessairement $\lambda \in \mathbf{R}^+$.
Les valeurs propres de L sont positives ou nulles.

d: LU est la matrice colonne formée sur chaque ligne i par la somme des éléments de la ligne i de L.
Donc $LU = 0$ matrice nulle de $\mathscr{M}_{5,1}(\mathbf{R})$.
Donc U est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 0$. **c.q.f.d.**

5) **a:** • Si $X \in \mathrm{Vect}(U)$ alors $LX = 0$.
• Réciproquement, si $LX = 0$, alors ${}^tXLX = 0$.
À la question 3) b, on a montré que ${}^tXLX$ est la somme de 5 carrés.
Chacun des carrés doit donc être nul donc $a = b = c = d = e$ donc $X = aU$ et $X \in \mathrm{Vect}(U)$

On a bien montré l'équivalence :

$$LX = 0 \Longleftrightarrow X \in \mathrm{Vect}(U)$$

b: La question 5) a : permet d'affirmer que le sous espace propre associé à la valeur propre 0 est $\mathrm{Vect}(U)$.
Si un autre des λ_2, λ_3, λ_4, λ_5 était nuls, on aurait un deuxième vecteur propre dans la base propre qui serait associé à la valeur propre 0, et on aurait $\dim(E_{\lambda=0}) \geqslant 2$, ce qui est impossible.
Donc $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ sont des réels strictement positifs.

Exercice 2

1) On peut chercher dans le champ des fonctions affines.
Si $f(x) = ax + b$, $\quad f(x) - f(y) = a(x - y)$ donc $|f(x) - f(y)| = |a|\ |x - y|$
Il suffit donc de prendre a tel que $|a| < 1$.

$\boxed{\text{On peut proposer l'application affine définie par : } \forall x \in \mathbf{R} \qquad f(x) = -\dfrac{1}{3}\, x + 4}$

2) Soit f une fonction K-contractante.
Soit $x_0 \in \mathbf{R}$, $\qquad \forall x \in \mathbf{R} \qquad |f(x) - f(x_0)| \leqslant K\,|x - x_0|$
Donc, par le théorème d'encadrement : $\qquad \lim\limits_{x \to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$.
Ce qui est la définition de : $\qquad \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
f est continue en x_0 pour tout $x_0 \in \mathbf{R}$. $\boxed{f \text{ est bien continue sur } \mathbf{R}}$

3) Supposons que l'équation $\quad f(x) = x \quad$ admet deux solutions distinctes x_1 et x_2.
La propriété (*) donne : $\qquad |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant K|x_1 - x_2|$.
Comme $f(x_1) = x_1$ et $f(x_2) = x_2$, on obtient : $\qquad |x_1 - x_2| \leqslant K\ |x_1 - x_2|$.
Donc $|x_1 - x_2|(1 - K) \leqslant 0$
Or $|x_1 - x_2| > 0$ et $(1 - K) > 0$ donc l'inégalité précédente est impossible.
Par l'absurde, l'équation $\quad f(x) = x \quad$ admet au plus une solution. **c.q.f.d.**

4) **a:** Soit $n \in \mathbf{N}$ et posons $(H_n) \quad |u_{n+1} - u_n| \leqslant K^n\,|u_1 - u_0|$.
Montrons que (H_n) est vrai pour tout n par récurrence.
• (H_0) est évidemment vrai car $|u_1 - u_0| \leqslant K^0|u_1 - u_0|$.
• Supposons (H_n) vrai.
$|u_{n+2} - u_{n+1}| = |f(u_{n+1}) - f(u_n)| \leqslant K|u_{n+1} - u_n|$.
On applique l'hypothèse (H_n) et on obtient :
$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leqslant K \times K^n|u_1 - u_0| = K^{n+1}|u_1 - u_0|$. Donc (H_{n+1}) est vrai.
Ce qui achève la récurrence : (H_n) est vrai pour tout $n \in \mathbf{N}$ **c.q.f.d.**

b: Posons $v_n = u_{n+1} - u_n$.
On a donc $|v_n| \leqslant K^n|u_1 - u_0|$.
La série géométrique $\sum\limits_{n \in \mathbf{N}} K^n$ est convergente car $0 < K < 1$.
Donc la série de terme général $K^n|u_1 - u_0|$ converge et, par le critère de majoration des séries à termes positifs, la série $\sum |v_n|$ converge.
La série $\sum v_n$ est absolument convergente donc convergente. **c.q.f.d.**

Considérons S_n la somme partielle de rang n de la série convergente $\sum\limits_{k=0}^{n} v_k$.

$S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0$ par télescopage.
$u_n = S_n + u_0$ et, comme la série $\sum\limits_{n \in \mathbf{N}} v_n$ converge, (S_n) converge vers un réel ℓ.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell + u_0$.
On a bien prouvé que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente vers un réel a. **c.q.f.d.**

c: Comme f est continue, on sait que (u_n) converge vers un point fixe de la fonction f. L'équation $f(x) = x$ admet une solution $a = \ell + u_0$ et elle est unique puisqu'il ne peut y en avoir plus qu'une. **c.q.f.d.**

5) On désigne par n et p des entiers naturels (avec $p \geqslant 1$).

a: Pour tout $i \in \mathbf{N}$ $\quad |u_{i+1} - u_i| \leqslant K^i\,|u_1 - u_0|$.
Donc, en sommant, on obtient bien : $\displaystyle\sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i| \leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i \times |u_1 - u_0|$

b: On commence par remarquer que $u_{n+p} - u_n = \displaystyle\sum_{i=n}^{n+p-1} (u_{i+1} - u_i)$. Donc

$$\begin{aligned}
|u_{n+p} - u_n| &= \left|\sum_{i=n}^{n+p-1} (u_{i+1} - u_i)\right| \\
&\leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i| \quad \text{(inégalité triangulaire)} \\
&\leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i \times |u_1 - u_0| = |u_1 - u_0| \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i
\end{aligned}$$

Si on pose, pour $N \in \mathbf{N}$ $\quad A_N = \displaystyle\sum_{i=0}^{N} K^i$, on sait que $A_N = \dfrac{1 - K^{N+1}}{1 - K}$

$\displaystyle\sum_{i=n}^{n+p-1} K^i = A_{n+p-1} - An = \frac{1 - K^{n+p}}{1 - K} - \frac{1 - K^n}{1 - K} = \frac{K^n - K^{n+p}}{1 - k} = K^n \times \frac{1 - K^p}{1 - K}$.

On a bien l'inégalité $\quad |u_{n+p} - u_n| \leqslant K^n \times \dfrac{1 - K^p}{1 - K}\ |u_1 - u_0|$ **c.q.f.d.**

c: L'inégalité précédente étant vraie pour tout $p \in \mathbf{N}$, on fait tendre p vers $+\infty$.
On sait que $\lim\limits_{p\to+\infty} u_{n+p} = a$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} K^p = 0$ donc,
on obtient l'inégalité : $\quad |a - u_n| \leqslant \dfrac{K^n}{1 - K} \times |u_1 - u_0|$ **c.q.f.d.**

6) *Étude d'un exemple :* on considère la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbf{R} \qquad f(t) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^t}$$

a: $t \mapsto 1 + e^t$ est C^∞ sur $\mathbf{R}$ et strictement positive, donc, par quotient, f est C^∞ sur $\mathbf{R}$.
Pour dériver, on peut écrire $f(t) = (1 + \mathrm{e}^t)^{-1}$. Pour tout $t \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned}
f'(t) &= -\mathrm{e}^t\left(1 + \mathrm{e}^t\right)^{-2} = -\frac{\mathrm{e}^t}{(1 + \mathrm{e}^t)^2} \\
f''(t) &= \left(-\mathrm{e}^t\left(1 + \mathrm{e}^t\right)^{-2}\right) - 2\left(-\mathrm{e}^t\right)^2\left(1 + \mathrm{e}^t\right)^{-3} \\
&= \left[-\mathrm{e}^t(1 + \mathrm{e}^t) + 2\mathrm{e}^{2t}\right] \frac{1}{(1 + \mathrm{e}^t)^3} \\
&= \mathrm{e}^t(\mathrm{e}^t - 1)\ \frac{1}{(1 + \mathrm{e}^t)^3}
\end{aligned}$$

b: $f''(t)$ est du signe de $\mathrm{e}^t - 1$ et $\mathrm{e}^t \geqslant 1 \Longleftrightarrow t \geqslant 0$. On peut dresser le tableau des variations de f' sur $\mathbf{R}$:

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(t)$		$-$	0	$+$	
f'	0	$\searrow$	$f'(0)$	$\nearrow$	0

Pour les limites :
en $+\infty$, $f'(t) \sim -\dfrac{1}{e^t} \to 0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f'(t) = 0$
en $-\infty$, le numérateur de $f'(t)$ tend vers 0 et son dénominateur tend vers 1 donc $\lim\limits_{t\to-\infty} f'(t) = 0$

Pour tout $t \in \mathbf{R}$ $\quad f'(t)$ est négatif donc $|f'(t)| = -f'(t)$ et le maximum de $|f'(t)|$ sur $\mathbf{R}$ est $M = -f'(0) = \dfrac{1}{4}$.

On a donc bien : $\qquad \forall t \in \mathbf{R} \qquad |f'(t)| \leqslant \dfrac{1}{4}$

c: f est C^1 sur $\mathbf{R}$ et on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis entre x et y :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{4}\,|x-y|$$

f est bien $\dfrac{1}{4}$-contractante. $\qquad$ **c.q.f.d.**

d: Par définition de la suite (u_n) on peut appliquer les résultats de la question 4).
$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge vers un réel } a}$

e: La fonction Python qui calcule le terme d'indice n d'une suite est un grand classique. On complète :

```python
import numpy as np

def f(t):
    return(1/(1+np.exp(t)))

def suite(n):
    u=0
    for k in range(1,n+1):
        u=f(u)
    return u
```

L'utilisation d'une fonction f n'est pas indispensable.

f: On a vu à la question 5) c, que $|u_n - a| \leqslant \dfrac{K^n}{1-K}\,|u_1 - u_0| \quad (1)$

Ici $K = \dfrac{1}{4}$ donc $\dfrac{K^n}{1-K} = \dfrac{1}{4^n} \times \dfrac{4}{3} = \dfrac{1}{3\times 4^{n-1}}$.

$u_1 = f(0) = \dfrac{1}{2}$ donc $|u_1 - u_0| = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi la condition (1) d'écrit $\qquad |u_n - a| \leqslant \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3\times 4^{n-1}} = \dfrac{2}{3\times 4^n}$.

On veut une valeur approchée de a à 10^{-3} près,
donc il suffit d'avoir $\dfrac{2}{3\times 4^n} \leqslant 10^{-3} \quad (2)$

$$\frac{2}{3\times 4^n} \leqslant 10^{-3} \iff 4^n \geqslant \frac{2\times 10^3}{3}$$

c.q.f.d.

g:
```
n=0
while 4**n < 2000/3:
    n=n+1
print(n)
print(suite(n))
```

Exercice 3

1) **a:** A est une matrice triangulaire, on sait que les valeurs propres sont les éléments de la diagonale principale. Donc les valeurs propres de A sont a et b.
Ainsi, si $a = b$, alors A ne possède qu'une seule valeur propre.

b: Supposons que A soit diagonalisable, A serait semblable à $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, c'est à dire à aI, en désignant par I la matrice identité de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.
Or seule aI est semblable à aI, et $A \neq aI$, c'est donc impossible.
Donc, si $a = b$, la matrice A n'est pas diagonalisable.

2) On suppose dans cette question que $a \neq b$.

a: On a vu que dans ce cas : $\boxed{Sp(A) = \{a, b\}}$

b: $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
$A\begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b(b-a) \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$.
Posons $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$.
On a $U_1 = aU_1$ donc U_1 est un vecteur propre associé à la valeur propre a.
On a $U_2 = bU_2$ donc U_2 est un vecteur propre associé à la valeur propre b.

c: Les deux vecteurs U_1 et U_2 sont non colinéaires donc forment une famille libre de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ qui est de dimension 2 donc $\mathscr{B} = (U_1, U_2)$ est une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})$.
La matrice P de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ à la base $\mathscr{B}$ est

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b-a \end{pmatrix}}$$

d: On sait d'après le cours que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.
Donc, avec $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, on a bien $AP = PD$ et A est diagonalisable.

3) On considère deux variables aléatoires, X et Y, indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

a: $X(\omega) = Y(\Omega) = \mathbf{N}^*$.
On utilise le système complet d'événement $(Y = n)_{n \in \mathbf{N}^*}$.
La formule des probabilité totales donne :

$P(X=Y)=\sum_{n=1}^{+\infty} P([X=Y]\cap[Y=n])=\sum_{n=1}^{+\infty} P([X=n]\cap[Y=n])$
Comme X et Y sont indépendantes, on a bien l'égalité :

$$P(X=Y)=\sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n)P(Y=n)$$

b: $P(X=n)=P(Y=n)=(1-p)^{n-1}p$ avec $p=\frac{1}{2}$ donc

$$\begin{aligned} P(X=Y) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}\frac{4}{3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

On peut conclure : $\boxed{P(X=Y)=\frac{1}{3}}$

4) **a:** Soit $A(X,Y)$ la matrice aléatoire définie par $A(X,Y)=\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y\end{pmatrix}$.
D'après l'étude précédente, $A(X,Y)$ est diagonalisable si et seulement si $X\neq Y$.
Notons B= l'événement $A(X,Y)$ n'est pas diagonalisable.

$B=(X=Y)$ et donc $\boxed{P(B)=\frac{1}{3}}$

b: On considère le script Python suivant :

```
m=int(input('entrez une valeur entière pour m :'))
c=0
for k in range(m):
    X=rd.geometric(1/2)
    Y=rd.geometric(1/2)
    if X==Y:
        c=c+1
i=1-c/m
print(i)
```

Dans ce script, X et Y simule bien des lois géométriques de paramètre $\frac{1}{2}$, X et Y sont indépendantes.
c représente le nombre de fois où $(X=Y)$ et donc, $\frac{c}{m}$ est la fréquence de l'événement $(X=Y)$.
Pour de grandes valeurs de l'entier naturel m, $\frac{c}{m}$ s'approche de la probabilité de l'événement $(X=Y)$, c'est à dire de $\frac{1}{3}$.
Il en résulte que l'affichage du contenu de la variable `i` sera proche de $1-\frac{1}{3}$ donc de $\frac{2}{3}$.

Problème

Partie 1 : propriété d'une loi de probabilité

On désigne par c un réel strictement positif et on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^{1+c}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

1) f est positive, continue sur $\mathbf{R}$ sauf éventuellement en $x_0 = 1$.
f sera donc une densité si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$

Du fait de la définition par morceaux de f, cette dernière intégrale devient $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$.
On peut remarquer que c'est une intégrale du type Riemann en $+\infty$ qui converge si et seulement si $1+c > 1$ ce qui est le cas car $c > 0$. Reste à calculer cette intégrale. Soit $A > 1$, posons $I(A) = \displaystyle\int_1^A f(x)\, dx$.

$$\begin{aligned} I(A) &= \int_1^A cx^{-1-c}\, dx = c \times \frac{1}{-c}\left[x^{-c}\right]_1^A \\ &= -\left[\frac{1}{x^c}\right]_1^A = -\frac{1}{A^c} + 1 \end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \frac{1}{A^c} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} I(A) = 1$

On a bien $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$ donc $\boxed{f \text{ est bien une densité}}$

2) Pour tout réel x, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$.
• Si $x < 1$, on a évidemment $F(x) = 0$ car $f(t) = 0$ si $t \leqslant x$.
• Si $x \geqslant 1$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{1} f(t)\, dt + \int_1^x f(t)\, dt = \int_1^x f(t)\, dt$
On peut récupérer le résultat du calcul de $I(A)$ de la question précédente. Donc

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^c} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}}$$

3) Soit t un réel strictement supérieur à 1.

a: Notons r la probabilité conditionnelle $P_{(X>t)}(X \leqslant tx)$.
• Si $x < 1$, $tx < t$ donc, sachant $(X > t)$, l'événement $X \leqslant tx$ est impossible.
Donc $r = 0$.
• Si $x \geqslant 1$, $r = \dfrac{P([X > t] \cap [X \leqslant tx])}{P(X > T)}$
Or, comme $tx \geqslant t$, $[X > t] \cap [X \leqslant tx] = [t < X \leqslant tx]$ donc $r = \dfrac{P(t < X \leqslant tx)}{P(X > t)}$

On fait intervenir la fonction de répartition :

$$\begin{aligned} r &= \frac{F(tx)-F(t)}{F(t)} = \frac{\left(1-\frac{1}{(tx)^c}\right)-\left(1-\frac{1}{t^c}\right)}{\left(\frac{1}{t^c}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{t^c}\left(1-\frac{1}{x^c}\right)}{\frac{1}{t^c}} \\ &= 1-\frac{1}{x^c} \end{aligned}$$

$$\boxed{P_{(X>t)}(X \leqslant tx) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<1 \\ 1-\frac{1}{x^c} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}}$$

b: Le résultat précédent peut aussi s'écrire : $P_{(X>t)}\left(\frac{X}{t} \leqslant x\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<1 \\ 1-\frac{1}{x^c} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

On retrouve la fonction F, donc la loi de $\frac{X}{t}$, conditionnellement à l'événement $(X>t)$, est la loi de X. **c.q.f.d.**

Partie 2 : réciproque de la propriété précédente

On considère une variable aléatoire Y de densité g nulle sur $]-\infty,1[$, strictement positive et continue sur $[1,+\infty[$.
On pose $c=g(1)$ et on note G la fonction de répartition de Y.
Dans toute la suite, on suppose que, pour tout réel strictement supérieur à 1, on a :

- $P(Y>t)>0$
- La loi de $\frac{Y}{t}$, conditionnellement à l'événement $(Y>t)$, est la loi de Y.

On veut alors montrer que Y suit une loi de Pareto de paramètre c.

4) $G(1)=P(Y \leqslant 1)=\int_{-\infty}^{1} g(t)\,dt=0$ car g est nulle sur $]-\infty,1[$. **c.q.f.d.**

5) **a:** Soit $x \geqslant 1$ et $t>1$. On sait que $G(tx)-G(t)=P(t<Y\leqslant tx)$ et $1-G(t)=P(Y>t)$. Donc

$$\begin{aligned} \frac{G(tx)-G(t)}{1-G(t)} &= \frac{P(t<Y\leqslant tx)}{P(Y>t)} \\ &= \frac{P([Y>t]\cap[Y\leqslant tx])}{P(Y>t]} \end{aligned}$$

On reconnaît la définition d'une probabilité conditionnelle : $P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

$$\begin{aligned} \frac{G(tx)-G(t)}{1-G(t)} &= P_{(Y>t)}(Y\leqslant tx) = P_{(Y>t)}\left(\frac{Y}{t}\leqslant x\right) \\ &= P(Y\leqslant x) \quad \text{car } \frac{Y}{t} \text{ sachant } (Y>t) \text{ a même loi que } Y \\ &= G(x) \end{aligned}$$

c.q.f.d.

b: G est la fonction de répartition d'une variable à densité donc G est continue sur $\mathbf{R}$ et C^1 sur $\mathbf{R}$ sauf éventuellement aux points où sa densité g n'est pas continue , donc C^1 sur au moins $\mathbf{R}-\{1\}$. G est bien C^1 sur $]1,+\infty[$. Soit $x \geqslant 1$, on va dériver la formule précédente par rapport à x (t étant considéré comme une constante).

$x \mapsto \dfrac{G(t)}{1-G(t)}$ est constante (ne dépend pas de x), donc sa dérivée par rapport à x est nulle.

$x \mapsto \dfrac{1}{1-G(t)}\ G(tx)$ a pour dérivée $\dfrac{1}{1-G(t)}\ tG'(tx)$.

On a bien

$$\forall x > 1, \forall t > 1, \quad G'(x) = \frac{tG'(tx)}{1-G(t)}$$

c: En tout u où G est C^1, $G'(u) = g(u)$ donc $\forall x > 1, \forall t > 1 \quad g(x) = \dfrac{tg(tx)}{1-G(t)}$.

On fait tendre x vers 1 à droite. g est continue sur $[1,+\infty[$ donc $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = g(1) = c$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} g(tx) = g(t)$.

Donc $c = \dfrac{tg(t)}{1-G(t)}$ qui peut s'écrire aussi $\quad c - cG(t) = tG'(t)$.

On sait que $c > 0$ car g est strictement positive sur $[1,+\infty[$ donc en particulier en 1.

En divisant par c on obtient bien la relation : $\quad G(t) + \dfrac{t}{c}\ G'(t) = 1 \quad$ **c.q.f.d.**

6) Dans cette question, la lettre y désigne une fonction de classe C^1 sur $]1,+\infty|$ qui, à tout réel t de $]1,+\infty[$, associe $y(t)$.

On note (E_1) l'équation différentielle $\quad y + \dfrac{t}{c}\ y' = 0$

et (E_2) l'équation différentielle $\quad y + \dfrac{t}{c}\ y' = 1$.

a: Soit z la fonction définie par $z(t) = t^c\ y(t)$. z est C^1 sur $]1,+\infty[$ par produit de fonctions C^1.

$\forall t > 1 \qquad z'(t) = ct^{c-1}y(t) + t^c y'(t)$. Pour tout $\in]1,+\infty[$:

$$\begin{aligned}
z(t) \text{ constante} &\iff z'(t) = 0 \\
&\iff ct^{c-1}y(t) + t^c y'(t) = 0 \\
&\iff y(t) + \frac{t}{c}\ y'(t) = 0 \quad \text{en multipliant par } \frac{1}{ct^{c-1}} \neq 0 \\
&\iff y \text{ solution de } (E_1) \qquad \textbf{c.q.f.d.}
\end{aligned}$$

b: On a donc :

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E_1) &\iff z(t) = K \\
&\iff t^c y(t) = K \\
&\iff y(t) = \frac{K}{t^c}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Les solutions de } (E_1) \text{ sont les fonctions } t \mapsto y(t) = \dfrac{K}{t^c} \quad K \in \mathbf{R} \text{ constante}}$

c: $\boxed{\text{La fonction constante } u = 1 \text{ est (évidemment) solution de } (E_2)}$

d: On a donc $u+\dfrac{t}{c}u'=1$. Posons $z=h-u$.

$$\begin{array}{rcl} h \text{ solution de } (E_2) & \iff & h+\dfrac{t}{c}\,h'=1 \\ & \iff & h+\dfrac{t}{c}\,h'=u+\dfrac{t}{c}\,u \\ & \iff & (h-u)+\dfrac{t}{c}\,(h'-u')=0 \\ & \iff & z+\dfrac{t}{c}\,z'=0 \\ & \iff & (h-u) \text{ solution de } (E_1) \qquad \textbf{c.q.f.d.} \end{array}$$

e: En utilisant 6) b , $(h-u)(t)=\dfrac{K}{t^c}$ donc $h(t)=u(t)+\dfrac{K}{t^c}=1+\dfrac{K}{t^c}$.
Les solutions de l'équation différentielle (E_2) sont les fonctions h définies par :

$$\forall t>1, \qquad h(t)=1+\frac{K}{t^c}$$

7) **a:** G est solutions de (E_2) donc $\forall t>1 \quad G(t)=1+\dfrac{K}{t^c}$.
Mais G est continue sur $\mathbf{R}$ et $G(t)=0$ pour $t<1$ et $\lim\limits_{t\to 1^-} G(t)=0$
On a donc nécessairement $\lim\limits_{t\to 1^+} G(t)=0$
Or $\lim\limits_{t\to 1^+} 1+\dfrac{K}{t^c}=1+K$, donc $1+K=0$ et, au final $K=-1$. Donc :

$$\forall t>1, \quad G(t)=1-\frac{1}{t^c}$$

b: Posons $v(t)=1-\dfrac{1}{t^c}$ pour $t\in[1,+\infty[$. $G(t)=v(t)$ sur $]1,+\infty[$.
On a vu que $G(1)=\lim\limits_{t\to 1} G(t)=0$ et, par ailleurs $v(1)=0$
On peut donc écrire : $\quad \forall t\in[1,+\infty[\qquad G(t)=1-\dfrac{1}{t^c}$ **c.q.f.d.**

On a $G(t)=0$ pour $t\in]-\infty,1[$ donc

$$\boxed{Y \text{ suit donc une loi de Pareto de paramètre } c}$$

La réciproque est bien justifiée.

Partie 3 : simulation d'une variable suivant la loi de Pareto de paramètre c

8) On pose $Z=\ln(X)$ et on admet que Z est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X. On note H sa fonction de répartition.

a: $X(\Omega)=[1,+\infty[$ donc $Z(\Omega)=\mathbf{R}^+$.
On peut déjà remarquer que $H(x)=0$ pour $x<0$.
Pour $x\geqslant 0$

$$\begin{array}{rcl} H(x) & = & P(Z\leqslant x)=P(\ln(X)\leqslant x) \\ & = & P(X\leqslant \mathrm{e}^x)=F(\mathrm{e}^x) \\ & = & 1-\dfrac{1}{(\mathrm{e}^x)^c} \\ & = & 1-\mathrm{e}^{-cx} \end{array}$$

$$\boxed{H(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 1-\mathrm{e}^{-cx} & \text{si } x\geqslant 0\end{cases}}$$

b: On reconnaît une loi exponentielle de paramètre c : $\boxed{Z \hookrightarrow \mathscr{E}(c)}$

c:
```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simulX(c):
    Z=rd.exponential(1/c)
    Z=np.exp(Z)
    return Z
```