Corrigé du DM n°5

À rendre le 11/03/2025

Exercice 1

1. f est un polynôme des 2 variables x et y et par conséquent $\boxed{f \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2}$.

2. (a) On a $\partial_1(f)f(x,y) = 4x^3 - 4x + 4y$ et $\partial_2(f)f(x,y) = 4y^3 - 4y + 4x$.

   (b) Le gradient de f est $\nabla(f)(x,y) = (\partial_1(f)(x,y), \partial_2(f)(x,y)) = (4x^3 - 4x + 4y, 4y^3 - 4y + 4x)$
   Donc $\nabla(f)(x,y) = (0,0)$ si, et seulement si, on a : $\begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases}$

   (c) (x,y) est donc un point critique de f si, et seulement si,

$$\begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases} \underset{(L_1 \leftarrow L_1 + L_2)}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x^3 = -y^3 \\ x^3 - x + y = 0 \end{cases}$$

   Comme la fonction $x \to x^3$ est bijective , le système équivaut à :

$$\begin{cases} y = -x \\ x^3 - 2x = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x(x^2 - 2) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2} \end{cases}$$

   f possède donc trois points critiques qui sont : $(0,0)$, $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$, $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

3. (a) On a $\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = 12x^2 - 4$, $\partial^2_{2,2}(f)(x,y) = 12y^2 - 4$ et $\partial^2_{1,2}(f)(x,y) = \partial^2_{2,1}(f)(x,y) = 4$.

   (b) Les matrices hessiennes de f sont donc :
   $H(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$, $H\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$ *et* $H\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$.

   (c) Les valeurs propres d'une matrice H sont les réels λ pour lesquels $H - \lambda I$ est non inversible.

   - en $(0,0)$:

$$H(0,0) - \lambda I = \begin{pmatrix} -4-\lambda & 4 \\ 4 & -4-\lambda \end{pmatrix}.$$

     Ainsi, λ est valeur propre de $H(0;0)$ ssi $(-4-\lambda)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow 8\lambda - \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda(8+\lambda) = 0$.

     Le réel 0 est donc valeur propre de $H(0;0)$ et la méthode du cours ne permet pas de conclure quant à l'existence (ou non) d'un extrémum pour f au point $(0;0)$.

   - en $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ et $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$:

$$H\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) - \lambda I = H\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) - \lambda I = \begin{pmatrix} 20-\lambda & 4 \\ 4 & 20-\lambda \end{pmatrix}$$

     Ainsi, λ est valeur propre de $H\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = H\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ ssi
     $(20-\lambda)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (20-\lambda-4)(20-\lambda+4) = 0 \Leftrightarrow (16-\lambda)(24-\lambda) = 0$.

Les 2 valeurs propres de $H\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)=H\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ sont donc 16 et 24 , deux réels strictement positifs , ce qui permet de conclure que f admet donc en ces deux points un minimum loc qui a pour valeur $f\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)=f\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)=-8$.

(d) On a $f(x,x)=x^4+x^4-2(x-x)^2=2x^4\geq 0$ au voisinage de $x=0$,
et $f(x,-x)=x^4+(-x)^4-2(x+x)^2=-8x^2+2x^4\underset{x\to 0}{\sim}-8x^2\leq 0$ au voisinage de $x=0$.
Comme $f(0,0)=0$ et f change de signe au voisinage de $(0,0)$,on peut conclure que :

f n'a pas d'extremum local en $(0,0)$.

4. (a) Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, On a :

$$f(x,y)-(x^2-2)^2-(y^2-2)^2-2(x+y)^2=x^4+y^4-2x^2-2y^2+4xy-x^4+4x^2-4-y^4+4y^2-4-2x^2-2y^2-4xy=$$

(b) On a donc : $f(x,y)=-8+(x^2-2)^2+(y^2-2)^2+2(x+y)^2\geq -8$, pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$.
Et comme $f\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)=f\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)=-8$, f admet un minimum GLOBAL en ces deux points .

5. (a) La fonction complétée :

```
def f(x,y):
        return x**4 + y**4 - 2*((x-y)**2)
```

(b) La première nappe est la seule où la fonction admet deux points où il y a un minimum (global) de même valeur et c'est donc la seule possible pour f.