DM n°5

À rendre le 11/03/2025

Exercice 1

On considère la fonction f qui à tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ associe le réel :

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$$

1. Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
2. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

   (b) Montrer que le gradient de f est nul si, et seulement si, on a : $\begin{cases} x^3 - x + y &= 0 \\ y^3 + x - y &= 0 \end{cases}$

   (c) En déduire que f possède trois points critiques : $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
3. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

   (b) Écrire la matrice hessienne de f en chaque point critique.

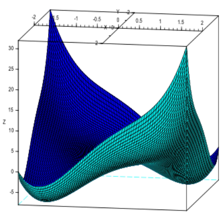
   (c) Déterminer les valeurs propres de chacune de ces trois matrices puis montrer que f admet un minimum local en deux de ses points critiques. Donner la valeur de ce minimum.

   (d) Déterminer les signes de $f(x,x)$ et $f(x,-x)$ au voisinage de $x=0$. Conclure quant à l'existence d'un extremum en le troisième point critique de f.
4. (a) Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, calculer $f(x,y) - (x^2-2)^2 - (y^2-2)^2 - 2(x+y)^2$.

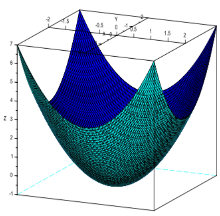
   (b) Que peut-on déduire de ce calcul quant au minimum de f ?
5. (a) Compléter la deuxième ligne du script suivant afin de définir la fonction f.

```python
def f(x,y):
        ...
```

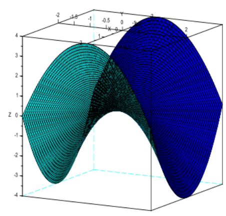
   (b) À partir de la fonction précédente, on trace la représentation en trois dimension du graphique de la fonction f. On obtient l'une des trois nappes ci-dessous. Laquelle ?



Nappe 1



Nappe 2



Nappe 3