Corrigé du DS n°1

le 20/09/2024
Durée : 4h

— L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
— La clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une grande part dans la notation.
— Le résultat d'une question peut être admis afin de traiter une question suivante.
— On encadrera le résultat de chaque question.

Exercice 1

1. Calculer (exprimer en fonction de n) : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k$.
2. Calculer (exprimer en fonction de n) : $\displaystyle\sum_{k=4}^{n}5\ \frac{2^{k+1}}{3^k}$.
3. Calculer : $\displaystyle\sum_{n=1}^{29}n$
4. Calculer (exprimer en fonction de n) : $\displaystyle\sum_{k=4}^{n}(2k+1)$.
5. Calculer (on ne demande pas de justifier la convergence) : $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^k$.
6. Calculer (on ne demande pas de justifier la convergence) : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(\frac{3}{4}\right)^k$.
7. Calculer (on ne demande pas de justifier la convergence) : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}k^2\left(\frac{3}{4}\right)^k$.
8. Calculer (on ne demande pas de justifier la convergence) : $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{3^k}{k!}$.

CORRIGÉ :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k=\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)}=3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right).$

2. $\displaystyle\sum_{k=4}^{n}5\ \frac{2^{k+1}}{3^k}=10\sum_{k=4}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k=10\ \left(\frac{2}{3}\right)^4\ \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-4+1}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)}=30\left(\frac{2}{3}\right)^4\ \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}\right).$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{29}n=\frac{29\times 30}{2}=435$

4. $\displaystyle\sum_{k=4}^{n}(2k+1)=(n-3)\ \frac{9+(2n+1)}{2}=(n-3)(5+n).$

5. $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^k=\left(\frac{3}{4}\right)^2\ \frac{1}{1-\left(\frac{3}{4}\right)}=\frac{9}{4}.$

6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(\frac{3}{4}\right)^k=\left(\frac{3}{4}\right)\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}=\left(\frac{3}{4}\right)\frac{1}{\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)\right)^2}=12.$

7. En remarquant que $k^2 = k(k-1)+k$, on obtient :
$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \left(\frac{3}{4}\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{3}{4}\right)^k + \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{3}{4}\right)^k ;$$
puis $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \left(\frac{3}{4}\right)^k = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{3}{4}\right)^{k-2} + \left(\frac{3}{4}\right)\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$;
puis $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \left(\frac{3}{4}\right)^k = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{2}{\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)\right)^3} + \left(\frac{3}{4}\right)\frac{1}{\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)\right)^2}$;
et enfin $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \left(\frac{3}{4}\right)^k = \left(\frac{3}{4}\right)^2 .2\ .4^3 + \left(\frac{3}{4}\right) 4^2 = 72+12 = 84.$

8. $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{3^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k}{k!} - \left(1+\frac{3^1}{1!}\right) = e^3 - 4.$

Exercice 2

D'après ECRICOME E 2005

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad f(x) = x^2 - x\ln(x) - 1 \quad \text{et} \quad f(0) = -1.$$

On donne le tableau de valeurs de f :

$x =$	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3	$3,5$	4
$f(x) \simeq$	$-0,4$	0	$0,6$	$1,6$	3	$4,7$	$6,9$	$9,5$

Étude d'une première suite associée à f.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Étudier la dérivabilité de la fonction f en 0. En donner une interprétation graphique.
3. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}_+^\times$, puis dresser son tableau de variations en précisant la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers l'infini.
4. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^\times$ sur un intervalle J que l'on précisera.
5. Quel est le sens de variation de f^{-1} ? Déterminer la limite de $f^{-1}(x)$ lorsque x tend vers l'infini.
6. Justifier que pour tout entier naturel k, il existe un unique réel x_k positif tel que $f(x_k) = k$.
7. Donner la valeur de x_0.
8. Utiliser le tableau de valeurs de f pour déterminer un encadrement de x_1 et x_2.
9. Exprimer x_k à l'aide de f^{-1} puis justifier que la suite (x_k) est croissante et déterminer sa limite lorsque k tend vers l'infini.

Étude d'une seconde suite.

On définit la fonction φ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \varphi(x) = \dfrac{2}{x} + \ln(x)$.

On définit la suite (u_n) par : $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \varphi(u_n)$

1. Étudier les variations de φ sur $\mathbb{R}_+^\times$.
2. On donne $\varphi(\frac{3}{2}) \simeq 1,73$ et $\varphi(2) \simeq 1,69$. Montrer que $\varphi\left(\left[\frac{3}{2};2\right]\right) \subset \left[\frac{3}{2};2\right]$.

3. En étudiant les variations de φ', montrer que : $\forall x \in \left[\frac{3}{2};2\right], \quad |\varphi'(x)| \leq \frac{2}{9}$.
4. Montrer que les équations $x = \varphi(x)$ et $f(x) = 1$ sont équivalentes. En déduire que le réel x_1 est l'unique solution de l'équation $x = \varphi(x)$.
5. Montrer successivement que pour tout entier n :

$$\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2 \quad ; \quad |u_{n+1} - x_1| \leq \frac{2}{9}|u_n - x_1| \quad ; \quad |u_n - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^n.$$

6. En déduire la limite de la suite (u_n).

Corrigé

3.1 Étude d'une première suite associée à f.

1. f est continue sur $]0;+\infty[$ comme somme et produit de fonctions continues. De plus , par négligeabilité usuelle, $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ donc $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -1$; donc f est également continue en 0. Donc f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. $\frac{f(x)-f(0)}{x} = x - \ln x$ donc $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty$. Ainsi la fonction f n'est pas dérivable en 0 et C_f admet une (demi)-tangente verticale en 0.
3. f est de classe C^2 sur $]0;+\infty[$ comme somme et produit de fonctions de classe C^2. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f'(x) = 2x - (\ln x + 1), f''(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}$$

Ainsi f'' s'annule et change de signe en $x = \frac{1}{2}$ et C_f est concave sur $]0,1/2[$, convexe sur $]1/2;+\infty[$.
Dans un premier temps, on en déduit le tableau de variations de f' :

x	0		1/2		$+\infty$
$f''(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$\searrow$	$f'(1/2)$	$\nearrow$	

Comme $f'(1/2) = 1 - \left(\ln\frac{1}{2} + 1\right) = \ln 2 > 0$, on a $f'(x) > 0$ pour tout $x > 0$; et donc f est strictement croissante.
Déterminons également la limite de f : $f(x) = x^2\left(1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$, $\ln x \underset{+\infty}{=} o(x)$ donc : $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$.
On en déduit alors le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^+$:

x	0		$+\infty$
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

4. f est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans J$=]-1,+\infty[$; donc, d'après le théorème de la bijection continue, f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur J.
5. f^{-1} est alors continue et strictement croissante sur J , à valeurs dans $]0;+\infty[$, d'où le tableau de variation de f^{-1} :

x	-1		$+\infty$
$f^{-1}(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

6. Pour tout entier naturel k, $k \in J$ et f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur J donc il existe un unique réel x_k (strictement) positif tel que :

$$f(x_k) = k$$

7. Par définition,x_0 est l'unique solution de $f(x)=0$ .Or $f(1)=0$ donc $x_0=1$.
8. Le tableau de valeurs permet de lire : $f(1.5)=0.6, f(2)=1.6$. Or x_1 est l'unique solution de $f(x)=1$ et f continue,strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc :$1.5<x_1<2$.
De même $f(2)=1.6, f(2.5)=3$, x_2 est l'unique solution de $f(\ x)=2$; donc : $2<x_2<2.5$.
9. On sait que pour $k\in\mathbb{N}$, $x_k{=}f^{-1}(k)$. Or f^{-1} est strictement croissante sur J donc pour tout k on a $f^{-1}(\ k)<f^{-1}(k+1)$ c'est à dire $x_k<x_{k+1}$. Donc la suite (x_k) est croissante.
On a $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f^{-1}(x)=+\infty$ et $x_k=f^{-1}(k)$ et donc $\lim\limits_{k\longrightarrow+\infty} x_k=+\infty$

3.2 Étude d'une seconde suite.

1. Pour $x\in\mathbb{R}^{+*}$, $\varphi'(x)=-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{-2+x}{x^2}$.
Limite en 0 : $\frac{2}{x}+\ln(x)=\dfrac{2+x\ln x}{x}$, or $\lim\limits_{x\longrightarrow0^+} x\ln x=0$, donc $\lim\limits_{x\longrightarrow0^+}\varphi(x)=+\infty$.
De plus, $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\varphi(x)=+\infty$.
Tableau de variation de φ :

x	0		2		$+\infty$
$\varphi'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	$1+\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

2. φ est décroissante sur $\left[\dfrac{3}{2},2\right]$ donc $\varphi\left(\left[\frac{3}{2},2\right]\right)\subset\left[\varphi(2),\varphi\left(\dfrac{3}{2}\right)\right]$. Or $\varphi\left(\frac{3}{2}\right)<2, \varphi(2)>\dfrac{3}{2}$; donc $\varphi\left(\left[\frac{3}{2},2\right]\right)\subset\left[\frac{3}{2},2\right]$.
3. $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}, \varphi''(x)=\dfrac{4}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{4-x}{x^3}$. Tableau de variation de φ' :

x	0		$\frac{3}{2}$		2		4		$+\infty$
$\varphi''(x)$	$\|$	$+$		$+$		$+$	0	-	
$\varphi'(x)$	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{2}{9}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1/8$	$\searrow$	0

On a : $\varphi'(\dfrac{3}{2})=\dfrac{-2+3/2}{9/4}=-\dfrac{2}{9}$, $\varphi'(2)=0$ et φ' est croissante sur $\left[\dfrac{3}{2},2\right]$; on en déduit que :

$$\forall x\in\left[\frac{3}{2},2\right], -\frac{2}{9}\leq\varphi'(x)\leq0$$

et donc :

$$\forall x\in\left[\frac{3}{2},2\right]\quad\left|\varphi'\left(x\right)\right|\leq\frac{2}{9}$$

4. Pour $x>0$,

$$x=\varphi\left(x\right)\Leftrightarrow x=\frac{2}{x}+\ln x\Leftrightarrow x^2=2+x\ln x\Leftrightarrow f\left(x\right)=1$$

Or le réel x_1 est l'unique solution de l'équation $f\left(x\right)=1$, donc x_1 est aussi l'unique solution de l'équation :

$$x=\varphi\left(x\right)$$

5. — Montrons par une récurence rapide que :$\forall n\in\mathbb{N}$,$\frac{3}{2}\leq u_n\leq2$
u$_0=\dfrac{3}{2}$ donc la relation est vraie pour $n=0$.
Supposons qu'au rang n, $\frac{3}{2}\leq u_n\leq2$ alors d'après la question 2. $\frac{3}{2}\leq\varphi(u_n)\leq2$ c'est à dire $\frac{3}{2}\leq u_{n+1}\leq2$, ce qui prouve l'hérédité de la relation et achève sa preuve en vertu du principe de récurrence.
On en conclut que $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\ ,\frac{3}{2}\leq u_n\leq2}$

— On a : $\forall x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right] \quad |\varphi'(x)| \leq \dfrac{2}{9}$. Par l'inégalité des accroissements finis, cela entraîne $\forall (a, b) \in \left[\dfrac{3}{2}, 2\right]^2 \quad |\varphi(b) - \varphi(a)| \leq \dfrac{2}{9}|b - a|$.
En particulier, on sait que $\forall n \in \mathbb{N}$,$\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$ et $x_1 \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$; donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\varphi(u_n) - \varphi(x_1)| \leq \frac{2}{9}|u_n - x_1|$$

donc

$$|u_{n+1} - x_1| \leq \frac{2}{9}|u_n - x_1|$$

— Montrons par récurence sur l'entier n, $|u_n - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}$
$|u_0 - x_1| = \left|\dfrac{3}{2} - x_1\right|$ or $x_1 \in \left[\dfrac{3}{2}; 2\right]$ donc $|u_0 - x_1| \leq 0.5 < \left(\dfrac{2}{9}\right)^0$,
donc la relation est vraie au rang $n = 0$
Supposons qu'au rang $n, |u_n - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^n, alors\ \dfrac{2}{9}|u_n - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}$. Or $|u_{n+1} - x_1| \leq \frac{2}{9}|u_n - x_1|$ donc $|u_{n+1} - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}$ La relation est donc héréditaire.
En vertu du principe de récurrence, $|u_n - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}$

6. On a $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{2}{9}\right)^n = 0$, par le théorème de l'encadrement, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} |u_n - x_1| = 0$ et donc $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = x_1$.

Exercice 3

I.Étude d'une fonction

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - 1 + x$.
On considère également la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 - \dfrac{x}{e^x}$.

1. (a) Montrer que g est croissante sur $\mathbb{R}$.
   (b) Calculer $g(0)$. En déduire, pour tout réel x, le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.
2. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (b) Montrer que la limite de f en $-\infty$ est $+\infty$.
3. (a) Montrer que la dérivée de f vérifie, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{e^x}$.
   (b) Établir le tableau de variations de f en y faisant figurer les limites.

II. Représentation graphique

On note $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x + 1$.

1. Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.
2. Déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) - (x+1)$. Interpréter graphiquement cette limite.
3. Tracer sur le même graphique $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

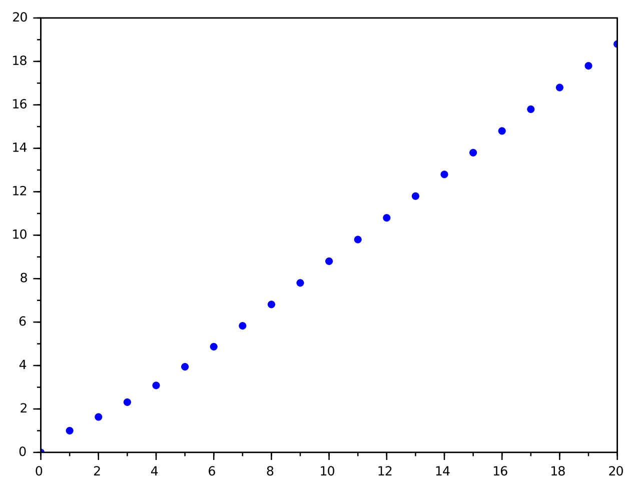
III. Calcul d'une intégrale

1. Calculer l'intégrale suivante :
$$\int_0^2 ((x+1) - f(x))\,\mathrm{d}x \ .$$
   On pourra remarquer que $\dfrac{x}{e^x} = xe^{-x}$.
2. De quelle surface cette intégrale donne-t-elle la valeur ? On fera apparaître cette surface (en la hachurant) sur le graphique.

IV.Étude d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. (a) Écrire une fonction `suite(n)` qui prend en argument un entier n et renvoie la valeur de u_n.
   (b) Le tracé ci-dessous représente les premiers termes de cette suite. Que semble-t-il indiquer quant au comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini ?



2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > x$.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.
   (d) Conclure en démontrant l'observation faite sur le graphique à la question 1.(b).

CORRIGÉ :

I.Étude d'une fonction

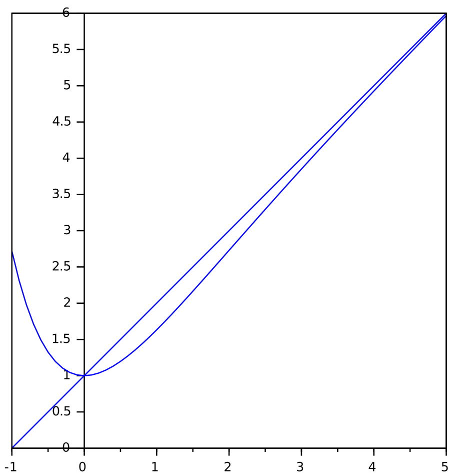
1. (a) La fonction g est dérivable car somme de fonctions dérivables et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^x+1$.
   Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$ $e^x > 0$, on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) > 0$.
   La fonction g est donc (strictement) croissante sur $\mathbb{R}$.
   (b) On $g(0) = e^0 - 1 + 0 = 0$.
   Comme g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, cela implique que :
   — pour $x < 0$, $g(x) < 0$;
   — pour $x > 0$, $g(x) > 0$.
2. (a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ (croissances comparées).
   On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   (b) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}\left(e^x + \dfrac{e^x}{x} - 1\right)$.
   Or $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x + \dfrac{e^x}{x} - 1\right) = -1$.
   D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{e^x} = -\infty$.
   On en conclut que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
3. (a) La fonction f est dérivable car quotient et somme de fonctions dérivable. Pour tout réel x,
$$f'(x) = 1 - \frac{e^x - xe^x}{(e^x)^2} = 1 - \frac{e^x(1-x)}{(e^x)^2} = \frac{e^x}{e^x} - \frac{1-x}{e^x} = \frac{e^x - 1 + x}{e^x} = \frac{g(x)}{e^x} \ .$$
   (b) D'après le résultat de la question précédente, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. On déduit alors le tableau de variations de f du signe de $g(x)$ étudié ci-dessus :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. La fonction f' est dérivable et, pour $x \in \mathbb{R}$,
$$f''(x) = \frac{(e^x+1)e^x - (e^x - 1 + x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{(e^x+1) - (e^x - 1 + x)}{e^x} = \frac{2-x}{e^x} \ .$$
   La fonction f'' est donc du signe de $2 - x$ donc f est :
   — convexe sur $]-\infty; 2]$;
   — concave sur $[2; +\infty[$.

II. Représentation graphique

1. On étudie le signe de $f(x) - (x+1) = -\dfrac{x}{e^x}$, du signe opposé à celui de x. Donc $\mathcal{C}$ est
   — au-dessus de $\mathcal{D}$ sur $]-\infty; 0[$;
   — au-dessous de $\mathcal{D}$ sur $]0; = \infty[$.
2. On a $f(x) - (x+1) = -\dfrac{x}{e^x}$; donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x+1) = 0$ (croissances comparées).
   Graphiquement, cela implique que la hauteur séparant $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ (on dit que $\mathcal{D}$ est asymptote à $\mathcal{C}$).



3.

III. Calcul d'une intégrale

1.
$$\int_0^2 ((x+1) - f(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{x}{e^x}\mathrm{d}x = \int_0^2 xe^{-x}\mathrm{d}x\ .$$

On effectue une intégration par parties en prenant

$$u(x) = x \quad ; \quad u'(x) = 1$$
$$v'(x) = e^{-x} \quad ; \quad v'(x) = -e^{-x}$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_0^2 ((x+1) - f(x))\,\mathrm{d}x &= \int_0^2 u(x)v'(x)\mathrm{d}x \\
&= [u(x)v(x)]_0^2 - \int_0^2 u'(x)v(x)\mathrm{d}x \\
&= \left[-xe^{-x}\right]_0^2 + \int_0^2 e^{-x}\mathrm{d}x \\
&= -2e^{-2} + \left[-e^{-x}\right]_0^2 \\
&= -2e^{-2} + \left(-e^{-2} - (-1)\right) \\
&= 1 - 3e^{-2}
\end{aligned}$$

2. Cette intégrale donne la valeur de la surface comprise entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$, entre les droites verticales d'abscisses 0 et 2.

IV. Étude d'une suite

1. (a)
```
import math

def f(x) :
    y=x+1-x/math.exp(x)
    return y

def suite(n):
    u=0
    for i in range(n):
        u = f(u)
    return u
```

(b) Ce graphique semble indiquer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini.

2. (a) Étudions la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^x - x$.
Cette fonction est dérivable et, pour $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = e^x - 1$.
La fonction h est donc
— décroissante sur $]-\infty; 0]$;
— croissante sur $[0; +\infty[$.
La fonction h atteint donc son minimum en $x = 0$.
Comme $h(0) = 1$, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) > 0$ et donc $e^x > x$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = 1 - \frac{u_n}{e^{u_n}} = \frac{e^{u_n} - u_n}{e^{u_n}} .$$

Or $e^{u_n} > 0$ et, d'après la question précédente, $e^{u_n} - u_n > 0$. Donc $u_{n+1} - u_n > 0$.
Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(c) $f(x) = x \Leftrightarrow 1 - \dfrac{x}{e^x} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x - x}{e^x} = 0 \Leftrightarrow e^x - x = 0$.
Or on a vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x - x > 0$.
Conclusion : cette équation n'a pas de solution.

(d) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Il y a donc deux possibilités :
— soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et elle admet alors une limite finie ;
— soit $\lim\limits_{n\to-\infty} u_n = +\infty$.
Si la première alternative est vérifiée, comme f est continue, la limite l de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $l = f(l)$. Mais on a vu que cette équation n'avait pas de solution.
Conclusion : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut admettre une limite finie et on a donc :

$$\lim_{n\to-\infty} u_n = +\infty .$$

Exercice 4

Dans ce problème, la lettre n désigne un entier naturel non nul.
On note f_n la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f_n(x) = xe^{-n/x}$ si $x \neq 0$ et $f_n(0) = 0$.
On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. (a) Montrer que f_n est continue en 0.
   (b) Montrer que f_n est dérivable (à droite) en 0 et donner la valeur du nombre dérivé en 0 de f_n.
2. (a) Montrer que f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$. Pour tout réel $x > 0$, calculer $f_n'(x)$ puis étudier son signe.
   (b) Calculer la limites de f_n en $+\infty$, puis donner le tableau de variation de f_n.
3. (a) Rappeler le développement limité à l'ordre 2 de e^u lorsque u est au voisinage de 0.
   (b) En déduire que, lorsque x est au voisinage de $+\infty$, on a :
   $$f_n(x) = x - n + \frac{n^2}{2x} + o(\frac{1}{x}).$$
   (c) En déduire qu'au voisinage de $+\infty$, (C_n) admet une asymptote "oblique"(D_n) dont on donnera une équation.
   Préciser la position relative de (D_n) et (C_n) aux voisinages de $+\infty$.
   (d) Donner l'allure de la courbe (C_1).
4. (a) Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera u_n, tel que $f_n(u_n) = 1$.
   (b) Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^{\times}$, u_n est strictement supérieur à 1 et que u_n est solution de l'équation $x\ln(x) = n$.
   (c) Étudier la fonction g définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = x\ln x$. En déduire, en utilisant la fonction g^{-1}, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
   (d) Justifier la relation $\ln u_n + \ln(\ln u_n) = \ln n$, puis montrer que $\ln u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.
   (e) En déduire un équivalent de u_n lorsque n est au voisnage de $+\infty$.

CORRIGÉ :

1. (a) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{-n}{x} = -\infty$; donc $\lim\limits_{x\to0^+} e^{-n/x} = 0$.
   Donc $\lim\limits_{x\to0^+} f_n(x) = 0 = f_n(0)$.
   Conclusion : f_n est continue en 0.
   (b) Pour $x > 0$, $\dfrac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = e^{-n/x} \underset{x\to0}{\to} 0$.
   Conclusion : f_n est dérivable (à droite) en 0 et $f_n'(0) = 0$.
2. (a) La fonction f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que composée et produit de fonctions dérivables.
   Pour tout réel $x > 0$,
   $$f_n'(x) = e^{-n/x} + x\left(\frac{n}{x^2}\right)e^{-n/x} = \left(1 + \frac{n}{x}\right)e^{-n/x}.$$
   Le signe de $f_n'(x)$ est le même que celui de $\left(1 + \dfrac{n}{x}\right)$; donc $f_n'(x) > 0$ pour tout $x > 0$.
   (b) En $+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-n}{x} = 0$; donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-n/x} = 1$; donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

   Tableau de variation de f_n :

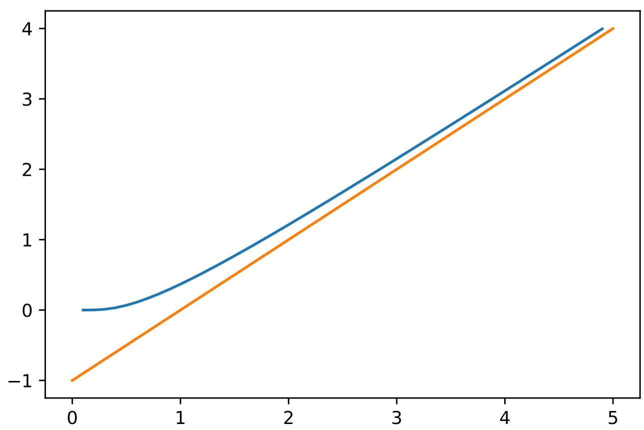
x	0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. (a) Lorsque u est au voisinage de 0, $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$.

   (b) Lorsque $x \to +\infty$, $\frac{-n}{x} \to 0$. On peut donc utiliser le DL2 précédent lorsque x est au voisinage de $+\infty$:
$$e^{-n/x} = 1 - \frac{n}{x} + \frac{n^2}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \ ;$$
ce qui donne :
$$f_n(x) = x - n + \frac{n^2}{2x} + o(\frac{1}{x}).$$

   (c) On a, d'après la question précédente,
$$f_n(x) - (x-n) = \frac{n^2}{2x} + o(\frac{1}{x})$$
Donc
$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) - (x-n) = 0 \ .$$
On en déduit qu'au voisinage de $+\infty$, (C_n) admet pour une asymptote oblique la droite (D_n) d'équation $y = x - n$.
Précisons la position relative de (D_n) et (C_n) aux voisinages de $+\infty$.
Pour cela on fait la remarque suivante :
$$f_n(x) - (x-n) = \frac{n^2}{2x} + o(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x}\left(\frac{n^2}{2} + o(1)\right) \ .$$
Or, pour $x > 0$, $1/x > 0$ et $\frac{n^2}{2} + o(1) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{n^2}{2} > 0$. Donc, pour x assez grand, $\frac{n^2}{2} + o(1) \geq 0$.
On en conclut que pour x assez grand, $f_n(x) - (x-n) \geq 0$ et donc que C_n est au-dessus de D_n.

   (d)



4. (a) La fonction f_n a les propriétés suivantes :
   — Elle est continue (composée et produit de fonctions continues sur $]0;+\infty[$ et continuité en 0 démontrée au début de l'exercice ;
   — elle est strictement croissante ;
   — $f_n(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

On en déduit, d'après le théorème de la bijection continue, que f_n établit une bijection de $[0;+\infty[$ sur $[0;+\infty[$.
Comme 1 est dans l'espace d'arrivée, on en déduit que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution dans $[0;+\infty[$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On a $f_n(1) = e^{-n} < 1$. Cela entraîne $u_n > 1$ car si on avait $u_n \leq 1$ on aurait, comme f est croissante, $f_n(u_n) \leq f_n(1)$, c'est à dire $1 \leq f_n(1)$.
Par ailleurs, on a $u_n e^{-n/u_n} = 1$, donc $\ln(u_n) + \ln(e^{-n/u_n}) = 0$, donc $\ln(u_n) - \dfrac{n}{u_n} = 0$ donc $\ln(u_n) = \dfrac{n}{u_n}$ donc $u_n \ln(u_n) = n$.
Ainsi u_n est solution de l'équation $x\ln(x) = n$.

(c) La fonction g est dérivable sur $[1,+\infty[$ est on a $g'(x) = \ln x + 1 > 0$.
Ainsi (on applique à nouveau le théorème de la bijection continue), g établit une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g^{-1}(x) = +\infty$.
Or $u_n = g^{-1}(n)$.
On en conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On a $u_n \ln(u_n) = n$; et donc, en prenant le logarithme, $\ln u_n + \ln(\ln u_n) = \ln n$.
Remarquons que, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = +\infty$; et donc, par croissances comparées,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(\ln(u_n))}{\ln(u_n)} = 0 \ .$$

Reprenons alors la relation $\ln u_n + \ln(\ln u_n) = \ln n$.
Elle donne, en divisant par $\ln u_n$:

$$1 + \frac{\ln(\ln(u_n))}{\ln u_n} = \frac{\ln(n)}{\ln u_n} \ ;$$

et donc, d'après la remarque qui précède,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{\ln u_n} = 1 \ .$$

On en conclut que $\ln u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

(e) Remarque : attention à ne pas tomber dans le piège : ce n'est pas parce que $\ln u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$ que $u_n = e^{\ln(u_n)} \sim e^{\ln n} = n$.
On repart de la relation $u_n \ln(u_n) = n$.
On a donc $u_n = \dfrac{n}{\ln(u_n)} \sim \dfrac{n}{\ln(n)}$.