

Programme des colles des semaines S3 et S4

Chapitre : Compléments sur les suites et les séries

1. Rappels sur les suites

- Suites usuelles (arithmético-géométriques, à double récurrence linéaire)
- Sommes associées aux suites usuelles (géométriques, arithmétiques)
- Somme des n premiers entiers, de leurs carrés
- Suites monotones, bornées ; convergence des suite (dé)croissantes majorées (minorées).
- Etude des suites définies par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$: intervalle stable, variations, théorème du point fixe, utilisation de l'inégalité des accroissements finis.

2. Comparaison des suites

- Suite négligeable devant une autre : définition, caractérisation par le quotient
- Reformulation des croissances comparées
- Règles de manipulation des o
- Equivalence de deux suites : définition, caractérisation par le quotient
- Equivalents usuels : lorsque $u_n \rightarrow 0$, $\ln(1 + u_n) \sim u_n$, $e^{u_n} - 1 \sim u_n$, $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$
- Règles de manipulation des \sim

3. Séries

- Définitions : suite des sommes partielles, convergence de la série, somme de la série
- Condition nécessaire de convergence de $\sum u_n$: $\lim u_n = 0$
- Premières propriétés : réindexation, changement de l'indice de départ, linéarité
- Sommes usuelles : géométrique et dérivées, exponentielle
- Théorème de "comparaison" des séries à termes positifs
- Utilisation de la négligeabilité pour montrer la convergence d'une série à termes positifs
- Utilisation de l'équivalence pour montrer la convergence d'une série à termes positifs
- Séries de Riemann
- Convergence absolue d'une série : définition, la convergence absolue implique la convergence

Questions de cours

• Équivalence de deux suites

- Définition
- Caractérisation
- Équivalents usuels.

• Sommes des séries usuelles

- géométrique et dérivées
- Exponentielle

• Négligeabilité et convergence des séries à termes positifs

- Énoncer le théorème de comparaison pour des séries à termes positifs (Prop.5.2)
- Énoncer le corollaire concernant l'utilisation de la négligeabilité pour montrer la convergence d'une série à termes positifs (Cor.5.4) et le démontrer à partir de la propriété précédente.