# RAPPELS SUR LES PROBABILITÉS DISCRÈTES

On résume ci-dessous les cours de première année concernant les probabilités discrètes ainsi que les variables aléatoires discrètes. En deuxième année, le cours, qui concerne les couples de variables aléatoires discrètes, nécessitera un usage constant de ces notions.

## 1 Cadre général

### 1.1 Définitions et vocabulaire

Les calculs de probabilités sont rendus rigoureux par le cadre suivant :

**Définition 1.1.** *On appelle espace probabilisé la donnée d'un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ où $\Omega$ est un ensemble, appelé univers, où $\mathcal{A}$ est une tribu de parties de $\Omega$, appelées événements, et où $\mathbb{P}$ est une application de $\mathcal{A}$ dans $[0,1]$, appelée probabilité, ces objets vérifiant :*

- *pour $\mathcal{A}$ : il faut que $\Omega$ lui-même soit un événement, que le complémentaire d'un événement soit un événement, et que toute réunion dénombrable (on peut en numéroter les éléments) d'événements soit un événement.*
- *pour $\mathbb{P}$ : on doit avoir $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements tels que leurs intersections deux-à-deux soit vides, on doit avoir :*
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$
*On appellera espace probabilisable la donnée du couple $(\Omega, \mathcal{A})$ seulement.*

**Vocabulaire** : On appelle $\Omega$ l'événement certain, $\emptyset$ l'événement impossible et tout événement de la forme $\{\omega\}$, où $\omega \in \Omega$ est appelé un événement élémentaire. Si $A$ est un événement on appelle événement contraire l'événement $\overline{A}$. On dit enfin que deux événements $A$ et $B$ sont incompatibles (ou disjoints) si $A \cap B = \emptyset$.

**Remarque 1.2.** *Lorsque l'espace $\Omega$ est fini, la tribu considérée est l'ensemble des parties de $\Omega$. En général, nous ne nous occuperons pas de ce problème de tribu.*

La notion suivante jouera souvent un rôle central dans la résolution des problèmes que l'on considérera :

**Définition 1.3.** *Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle système complet d'événements de $\Omega$ toute famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événement de $\mathcal{A}$ telle que*

- $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$,
- $\forall i, j \in I, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.

**Remarques 1.4.**
- *Le cas le plus simple, mais tout de même souvent utile, est le système $(A, \overline{A})$ où $A$ est un événement quelconque.*
- *Un autre cas est celui où les $A_i$ ne vérifient pas $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$, mais $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = 1$. Toute les propriétés des systèmes complets d'événements restent alors vraies.*

### 1.2 Résultats généraux

Les propriétés élémentaires d'une probabilité sont les suivantes.

**Propriété 1.5.** *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé. Soient $A, B \in \mathcal{A}$.*

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 1$ ;
- *si* $A \cap B = \emptyset$ *alors* $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ ;
- $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ ;
- *si* $A \subset B$ *alors* $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ ;
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Concernant les suites infinies d'événements, la propriété que nous utiliserons le plus est celle qui fait partie de la définition d'une probablité : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements tels que leurs intersections deux-à-deux soit vides, on doit avoir :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)\ .$$

Les deux propriétés suivantes seront pour nous d'un usage moins fréquent et peuvent être omises en première lecture.

**Théorème 1.6** (Propriété de la limite monotone). *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.*

- *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante ($\forall n, A_n \subset A_{n+1}$) d'événements, on a*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

- *Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante ($\forall n, B_{n+1} \subset B_n$) d'événements, on a*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n).$$

On en déduit :

**Corollaire 1.7.** *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements. On a*

- $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)$
- $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$

## 2 Probabilités conditionnelles

On définit la probabilité conditionnelle par :

**Définition et Propriété 2.1.** *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $A$ un événement de probabilité non nulle. L'application*

$$B \mapsto \mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

*qui à tout événement $B$ de $\Omega$ associe la probabilité conditionnelle de $B$ relativement à $A$ définit une loi de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.*

Les résultats suivants sont d'usage très fréquent.

**Propriété 2.2** (Formule des probabilités composées). *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Si $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille d'événements de $\Omega$ avec la probabilité $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right)$ non nulle, alors :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \mathbb{P}(A_1)\times\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\times\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\times ...\times\mathbb{P}_{A_1\cap A_2\cap ...\cap A_{n-1}}(A_n)\ .$$

**Remarque 2.3.** *On utilise souvent le cas de deux événements seulement : $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}_A(B)$ si $\mathbb{P}(A)\neq 0$.*

**Propriété 2.4** (Formule des probabilités totales). *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles. On a pour tout événement $B$ :*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i \cap B) \ ;$$

*et donc*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B) \ .$$

**Exemple 2.5.** *Dans le cas d'un système complet d'événements de la forme $(A, \overline{A})$, on obtient donc :*

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}_{\overline{A}}(B).$$

**Propriété 2.6** (Formule de Bayes). *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles. On a pour tout événement $B$, et pour tout $i_0 \in I$ :*

$$\mathbb{P}_B(A_{i_0}) = \frac{\mathbb{P}(A_{i_0})\mathbb{P}_{A_{i_0}}(B)}{\sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)} \ .$$

**Remarque 2.7.** *Plutôt que cette formule, c'est la méthode d'interversion du conditionnement qui est à retenir :*

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} \ .$$

**Exemple 2.8.** *Dans le cas d'un système complet d'événements $(A, \overline{A})$, on obtient :* $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}_{\overline{A}}(B)}$.

# 3 Indépendance

On formalise la notion intuitive d'indépendance par la définition suivante.

**Définition 3.1.** *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On dit que deux événements $A$ et $B$ sont indépendants si*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Intuitivement, l'indépendance de $A$ et $B$ signifie que la connaissance du fait que $A$ s'est produit n'influe pas la probabilité que $B$ se produise.

**Propriété 3.2.** *Deux événements $A$ et $B$ tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_A(B)$.*

**Propriété 3.3.** *Si $A$ et $B$ sont indépendants alors $\overline{A}$ et $B$ sont indépendants.*

**Définition 3.4.** *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $I \subset \mathbb{N}$. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements.*

- *On dit que les $A_i$ sont indépendants deux à deux si pour tous $i$ et $j$, $A_i$ et $A_j$ sont indépendants.*
- *On dit que les $A_i$ sont mutuellement indépendants si pour toute partie $J$ de $I$ on a*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} \mathbb{P}(A_i).$$

**Propriété 3.5.** *Si on a une famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événements mutuellement indépendants alors pour toute famille $(B_i)_{i\in I}$ où $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$ pour tout $i$, les $B_i$ sont mutuellement indépendants.*

# 4 Variables aléatoires discrètes

## 4.1 Loi de probabilité, fonction de répartition

Lors d'une expérience aléatoire, on s'intéresse le plus souvent à une quantité numérique liée à cette expérience. C'est ce que formalise la notion de variable aléatoire.

**Définition 4.1.** *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On appelle variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ une application $X$ de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ telle que $X(\Omega)$ soit un sous-ensemble discret de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire tel que l'on puisse numéroter ses éléments à l'aide d'entiers : il existe $I \subset \mathbb{N}$ tel que $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$.*

**Définition 4.2.** *On appelle loi de probabilité d'une variable aléatoire $X$ la donnée, pour tout $x_i \in X(\Omega)$ (c'est à dire $i \in I$) de la probabilité $\mathbb{P}(X = x_i)$ de l'événement $(X = x_i)$.*

**Remarque 4.3.** *Dans le cas où $X(\Omega)$ est fini, on peut donner la loi de $X$ sous la forme d'un tableau. Dans le cas général, on précisera l'expression $\mathbb{P}(X = x_i)$ en fonction de $x_i$.*

**Remarque 4.4.** *Une variable aléatoire discrète fournit naturellement un système complet d'événements :*

$$\{[X = x],\ x \in X(\Omega)\}$$

**Définition 4.5.** *Soit $X$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On appelle fonction de répartition de $X$, la fonction réelle définie par :*

$$F_X : x \mapsto \mathbb{P}(X \leq x)\ .$$

**Propriété 4.6.** *Toute fonction de répartition $F$ est :*

- *à valeurs dans $[0, 1]$,*
- *croissante,*
- *telle que $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.*

## 4.2 Espérance, variance et moments d'ordre supérieur

L'espérance d'une variable aléatoire est intuitivement sa moyenne (théorique).

**Définition 4.7.** *Soit $X$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On dit que $X$ admet une espérance si la série $\sum_{i \in I} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$ converge absolument. On dira de même que $X$ admet un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$ si la série $\sum_{i \in I} x_i^r \mathbb{P}(X = x_i)$ converge absolument. On définit alors :*

- *$E(X) = \sum_{i \in I} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$ l'espérance de $X$,*
- *$m_r(X) = \sum_{i \in I} x_i^r \mathbb{P}(X = x_i)$ le moment d'ordre $r$ de $X$.*

**Remarques 4.8.**

- *Dans le cas où $X$ est une variable finie, c'est-à-dire où $X(\Omega)$ est de cardinal fini, les sommes considérées sont des sommes finies, elles sont donc évidemment convergentes.*
- *Dans le cas où $X(\Omega)$ est infini, il sera la plupart du temps égal à $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}^*$). On écrira alors :*

$$E(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} i \times \mathbb{P}(X = i)\ .$$

**Propriété 4.9** (Propriétés de l'espérance). *On a les propriétés suivantes :*

- *linéarité de l'espérance : soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $X, Y$ deux variables aléatoires admettant des espérances. On a :*

$$E(aX+b) = aE(X) + b$$

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

- *positivité de l'espérance : soit $X$ une variable aléatoire à valeurs positives admettant une espérance. Alors $E(X) \geq 0$.*

**Théorème 4.10** (Théorème de transfert). *Soit $f$ une fonction réelle. On a, sous réserve de convergence absolue de la série considérée,*

$$E(f(X)) = \sum_{i \in I} f(x_i)\mathbb{P}(X = x_i) \ .$$

**Définition 4.11.** *Soit $X$ une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé admettant un moment d'ordre 2. On appelle variance de $X$ le réel positif :*

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

*On appelle de plus écart-type de $X$ le réel positif :*

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

**Propriété 4.12** (Formule de Koenig-Huygens). *On a :*

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

**Propriété 4.13.** *Si une variable aléatoire $X$ admet un moment d'ordre 2, alors pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on a*

$$V(aX+b) = a^2 V(X) \ .$$

# 5 Lois usuelles

## 5.1 Lois finies

On considère tout d'abord les lois des variables aléatoires prenant un nombre fini de valeurs.

**Définition et Propriété 5.1.** *Soit $X$ une variable aléatoire. On dit que $X$ suit la loi uniforme sur $\{1, ..., n\}$ si :*

- $X(\Omega) = \{1, ..., n\}$,
- $\forall k \in \{1, ..., n\}$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$.

*On a alors :*

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

**Remarques 5.2.**

- *Cette loi correspond au cas où on a équiprobabilité.*
- *Plus généralement, s'il y a équiprobabilité des tirages entre les entiers $a$ et $b$ (inclus), en notant $n = b - a + 1$, on a : $\forall k \in \{a, ..., b\}$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$, $E(X) = \frac{a+b}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.*

**Définition et Propriété 5.3.** *Soit $X$ une variable aléatoire. On dit que $X$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$ si :*

- $X(\Omega) = \{0,1\}$,
- $\mathbb{P}(X=1) = p$.

*On a alors :*

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = p(1-p)$$

**Remarque 5.4.** *Toute expérience ayant deux résultats possibles peut-être modélisée à l'aide de cette loi, comme un tirage à pile ou face ou toute expérience amenant à un succès ou un échec.*

**Définition et Propriété 5.5.** *Soit $X$ une variable aléatoire. On dit que $X$ suit la loi binômiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$ si :*

- $X(\Omega) = \{0,...,n\}$,
- $\forall k \in \{0,...,n\}$, $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

*On a alors :*

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p)$$

**Remarque 5.6.** *Cette loi modélise le nombre de succès lorsque l'on répète $n$ expériences indépendantes donnant soit un succès soit un échec. Elle correspond en particulier à une* succession de tirages avec remise, si l'on compte le nombre de tirages obtenus donnant un "succès" avec probabilité $p$. *L'exemple le plus simple est ainsi une suite de $n$ tirages à pile ou face, $X$ donnant le nombre de piles obtenus.*

## 5.2 Lois discrètes infinies

On considère des variables aléatoires prenant leurs valeurs dans $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}^*$).

**Définition et Propriété 5.7.** *Soit $X$ une variable aléatoire. On dit que $X$ suit la loi géométrique de paramètre $p \in [0,1]$ si :*

- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$,
- $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}$.

*On a alors :*

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2}\ .$$

**Remarque 5.8.** *Cette loi modélise le premier rang d'apparition d'un succès de probabilité p lorsque l'on répète de façon indépendante une expérience avec succès/échec. On l'utilisera ainsi pour donner la loi du rang du premier pile pour une suite infinie de tirages à pile ou face.*

**Définition et Propriété 5.9.** *Soit $X$ une variable aléatoire. On dit que $X$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ si :*

- $X(\Omega) = \mathbb{N}$,
- $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

*On a alors :*

$$E(X) = \lambda \quad \text{et} \quad V(X) = \lambda\ .$$