# Feuille d'exercices n° 3 : Couples de variables aléatoires discrètes

## 1 Méthodes de base

**Exercice 1. – Déterminer les lois marginales à partir de la loi du couple** – La loi du couple $(X, Y)$ est donnée par le tableau suivant :

| $Y \diagdown X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1/10 | 2/10 | 1/10 |
| 2 | 4/10 | 1/10 | 1/10 |

Déterminer les lois marginales de ce couple.

**Exercice 2. – Déterminer une des marginales à partir de la loi du couple** – On lance indéfiniment une pièce donnant pile avec probabilité $p$ $(0 < p < 1)$. On note, pour $k \geq 1$, $A_k$ l'événement "obtenir Pile au $k$-ème lancer". On note $X_1$ la v.a.r représentant le rang du premier Pile et $X_2$ la v.a.r représentant le rang du second Pile.

1. Rappeler la loi de $X_1$, rappeler son espérance.
2. Déterminer la loi du couple $(X_1, X_2)$. On utilisera les événements $A_k$ pour décrire les événements du type $[X_1 = i] \cap [X_2 = j]$.
3. En déduire la loi de $X_2$ puis l'espérance de $X_2$.

**Exercice 3. – Déterminer une des marginales à partir d'une loi conditionnelle** – On dispose d'une urne $U_1$ contenant une boule noire et une boule blanche et d'une urne $U_2$ contenant une boule noire et deux boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante : on lance une pièce équilibrée ; si le résultat est Pile, on effectue des tirages avec remise dans $U_1$ jusqu'à ce qu'on obtienne une boule noire ; si le résultat est Face, on effectue des tirages avec remise dans $U_2$ jusqu'à ce qu'on obtienne une boule noire. On note $X$ la variable aléatoire valant 1 si on a obtenu Pile et 0 sinon ; et $Y$ la variable aléatoire représentant le rang auquel on obtient la première boule noire.

1. Déterminer la loi conditionnelle de $Y$ sachant $[X = 1]$ puis sachant $[X = 0]$.
2. En déduire la loi de $Y$.
3. Déterminer l'espérance de $Y$.

**Exercice 4. – Fonction d'un couple de v.a.r, formule de transfert** – On reprend les données de l'exercice 1. On définit la v.a.r $Z = XY$

1. Déterminer la loi de $Z$ puis son espérance.
2. Retrouver l'espérance de $Z$ à l'aide de la formule de transfert.

**Exercice 5. – Covariance, indépendance** – On reprend les données de l'exercice 1.

1. Les v.a.r $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?
2. Déterminer la covariance du couple $(X, Y)$. Retrouver le résultat de la question précédente.
3. Déterminer le coefficient de corrélation du couple $(X, Y)$.

**Exercice 6. – Formule de transfert** – On reprend les données de l'exercice 3. Déterminer l'espérance de $XY$ puis la covariance de $X$ et $Y$.

**Exercice 7. – Loi d'une somme** – Soit $X$ et $Y$ deux v.a.r indépendantes suivant des lois uniformes sur $\{1, \dots, n\}$. On pose $S = X + Y$.

1. Déterminer l'espérance de $S$.
2. Déterminer la loi de $S$.

**Exercice 8. – Loi d'un maximum** – Soit $X$ et $Y$ deux v.a.r indépendantes suivant des loi uniformes sur $\{1, \dots, n\}$. On pose $U = max(X, Y)$ et $V = min(X, Y)$.

1. Déterminer la loi de $U$ puis son espérance.
2. En remarquant que $U + V = X + Y$, déduire de la question précédente l'espérance de $V$.
3. Déterminer la loi de $V$ puis retrouver son espérance.

## 2 Couples de variables aléatoires

**Exercice 9.** – Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $1/4$ et $Y$ une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

1. On suppose que $X$ et $Y$ sont indépendantes. Déterminer la loi du couple $(X, Y)$ (on présentera sous forme d'un tableau).
2. On suppose que $P(X = 0, Y = 0) = 3/10$. Déterminer la loi du couple $(X, Y)$ (on présentera sous forme d'un tableau).

**Exercice 10.** – Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi uniforme avec $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$. On note $Y = X^2$.

1. Déterminer la loi du couple $(X, Y)$.
2. En déduire la loi de $Y$.
3. Calculer la covariance $\mathrm{Cov}(X, Y)$.
4. $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?

**Exercice 11.** – – Un péage comporte $m$ guichets numérotés de 1 à $m$. Soit $N$ la variable aléatoire égale au nombre de voitures arrivant au péage en 1 heure. On suppose que $N$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose de plus que les conducteurs choisissent leur file au hasard et que ces choix sont indépendants. Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de voitures se présentant au guichet 1.

1. Déterminer la loi conditionnelle de $X$ sachant $[N = n]$.
2. Montrer que $P(X = k) = e^{-\lambda}\left(\dfrac{1}{m}\right)^k \dfrac{\lambda^k}{k!}\sum\limits_{j=0}^{+\infty}\dfrac{1}{j!}\left(\lambda\left(1 - \dfrac{1}{m}\right)\right)^j$.
   En déduire la loi de probabilité de $X$ (on retrouvera une loi usuelle).
3. Donner sans calcul les valeurs de $E(X)$ et de $V(X)$.

**Exercice 12.** – Soient $X$, $Y$ et $Z$ trois variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi géométrique de paramètre $p$. On pose $S = X + Y$.

1. Déterminer l'espérance et la variance de $S$.
2. Déterminer la loi de $S$. Retrouver $E(S)$.
3. (a) Pour $k \geq 1$, calculer $P(Z \geq k)$.
   (b) Calculer $P(S \leq Z)$

**Exercice 13.** – Dans cet exercice, $n$ désigne un entier naturel non nul. On dispose d'une pièce dont la probabilité de faire "pile" est $p \in ]0; 1[$ et de $(n + 1)$ urnes numérotées de 0 à $n$.
Pour $k \in [\![0; n]\!]$, l'urne numéro $k$ contient $k$ boules vertes et $(n - k)$ boules rouges.

On considère l'expérience $\mathcal{E}$ suivante : on lance $n$ fois la pièce, puis on pioche une unique boule dans l'urne dont le numéro correspond au nombre de fois où " pile" a été obtenu.

Par exemple, si on a obtenu quatre " piles" au cours de ces $n$ lancers, on pioche dans l'urne $n^o 4$.

On note $X$ la variable aléatoire correspondant au nombre de "piles" obtenues lors des $n$ lancers et $Y$ la variable aléatoire qui vaut 1 si l'on tire une boule verte et 0 sinon.

1. (a) Reconnaître la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$.
   On précisera en particulier $X(\Omega)$ et $P(X = k)$ pour tout $k$ de $X(\Omega)$.
   Donner l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.
   (b) En utilisant la formule de Koenig-Huygens, calculer la valeur de $E(X^2)$.
2. (a) Calculer $P_{(X=0)}(Y = 0)$ et $P_{(X=n)}(Y = 0)$. $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes?
   (b) Justifier que, pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $\quad P_{(X=k)}(Y = 1) = \dfrac{k}{n}$.
   (c) En déduire, en utilisant le système complet d'événements $(X = k)_{0 \leq k \leq n}$, que :

$$P(Y = 1) = \frac{E(X)}{n}$$

(d) Donner la loi de $Y$ et son espérance.

3. (a) Montrer que $E(XY) = \sum_{k=0}^{n} kP(X = k \cap Y = 1) = \frac{E(X^2)}{n}$.

   (b) En déduire la covariance du couple $(X, Y)$.

# 3 Suites de variables aléatoires

**Exercice 14.** – On considère une urne contenant $m$ boules ( $m \geq 1$ ) numérotées de 1 à $m$. On effectue successivement $n$ tirages ($n \geq 2$) dans l'urne, avec remise. On note $X_i$ le numéro de la boule tirée au $i$-ème tirage et $S = \max(X_1, ..., X_n)$.

1. (a) Justifier que pour tout $k$ on a $(S \leq k) = \bigcap_{i=1}^{n}(X_i \leq k)$.

   (b) En déduire la probabilité $P(S \leq k)$ pour tout $k \in \{1, ..., m\}$.

   (c) Justifier que $P(S = k) = P(S \leq k) - P(S \leq k - 1)$. En déduire la loi de $S$.

2. En utilisant la même stratégie que dans la première question, déterminer la loi de la variable $I = \min(X_1, ..., X_n)$.

**Exercice 15.** – Soient $X_1$, $X_2$, ... $X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que pour tout entier $i \geq 1$, la variable aléatoire $X_i$ est de loi géométrique de paramètre $\frac{1}{i}$.
Calculer l'espérance et la variance de la variable $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

**Exercice 16.** –

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge. On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne selon le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne puis on rajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, une boule de la couleur de la boule que l'on a tirée.

Pour tout entier naturel $n$, on note $X_n$ la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues au cours dans $n$ premiers tirages.

1. <u>Loi de $X_2$</u>

   (a) Pour $k \in \{0, 1, 2\}$, exprimer l'événement $(X_2 = k)$ à l'aide d'événements élémentaires.

   (b) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de $X_2$.

2. <u>Loi de $X_3$</u>

   (a) Calculer $P(X_3 = 0)$ et $P(X_3 = 3)$.

   (b) En introduisant le système complet d'événements $(X_2 = 0)$, $(X_2 = 1)$, $(X_2 = 2)$, calculer $P(X_3 = 1)$ et $P(X_3 = 2)$.

3. <u>Loi de $X_n$ pour $n \geq 2$</u>

   (a) Expliciter $X_n(\Omega)$ ; calculer $P(X_n = 0)$ et $P(X_n = 1)$.

   (b) Justifier convenablement que pour tout entier $k$ tel que $1 \leq k \leq n$ on a :

$$P(X_n = k) = P[(X_n = k) \cap (X_{n-1} = k - 1)] + P([X_n = k) \cap (X_{n-1} = k)]$$

   (c) Calculer soigneusement $P_{(X_{n-1}=k-1)}(X_n = k)$ et $P_{(X_{n-1}=k)}(X_n = k)$.

   (d) Montrer par récurrence sur $n \geq 2$ que :

$$\forall k \in \{0, ..., n\}, P(X_n = k) = \frac{1}{n+1}.$$

   (e) Donner l'espérance et la variance de $X_n$.